

Pendekatan pemodelan matematika penyebaran Tuberkulosis Sensitif Obat (TB-SO) dan Tuberkulosis Resisten Obat (TB-RO) dengan vaksinasi dan isolasi

Berliana Aulia Mahdi^{1*}, Budi Priyo Prawoto²

^{1,2} Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya

berliana.22095@mhs.unesa.ac.id

Diterima: 03-02-2026; Direvisi: 01-03-2026; Dipublikasi: 05-03-2026

Abstract

Tuberculosis (TB) remains a serious public health problem. Based on bacterial susceptibility to anti-tuberculosis drugs, TB is classified into drug-susceptible TB (DS-TB) and drug-resistant TB (DR-TB), where the presence of DR-TB poses a challenge for control because its management is more complex and it has the potential to sustain transmission within a population. Mathematical models can be used to understand the transmission dynamics of DS-TB and DR-TB. This study analyzes the $SVE_sE_rI_sI_rQR$ model. The novelty of this research lies in the development of a two-strain TB model that simultaneously incorporates strain-specific latent phase separation, differences in transmission rates between strains, and TB-RO-specific isolation interventions within a single framework. The analysis includes determining equilibrium points, the reproduction number using next generation matrix, stability analysis, and numerical simulations. Three equilibrium points are obtained: disease-free, TB-RO mono-existence, and coexistence of both strains. Stability analysis at each equilibrium point is carried out using the value of R_0 . The analysis is performed through parameter conditions related to the transmission rate of DS-TB (β_s) and the transmission rate of DR-TB (β_r). Sensitivity analysis shows that reducing β_s and β_r has a major impact on suppressing the transmission of DS-TB and DR-TB. In addition, increasing σ substantially reduces DR-TB transmission by enhancing the isolation of DR-TB cases.

Keywords: mathematical model; local stability analysis; drug-sensitive tuberculosis; drug-resistant tuberculosis.

Abstrak

Tuberkulosis (TB) masih menjadi masalah kesehatan yang serius. Berdasarkan tingkat kepekaan bakteri terhadap obat anti-tuberkulosis, TB dibedakan menjadi TB sensitif obat (TB-SO) dan TB resisten obat (TB-RO), di mana keberadaan TB-RO menjadi tantangan pengendalian karena penanganannya lebih kompleks serta berpotensi mempertahankan penularan dalam suatu populasi. Model matematika dapat digunakan untuk mengetahui dinamika penyebaran TB-SO dan TB-RO. Penelitian ini menganalisis model $SVE_sE_rI_sI_rQR$ yang di mana kebaruan penelitian ini terletak pada pengembangan model dua strain TB yang secara simultan memuat pemisahan fase laten spesifik strain, perbedaan laju penularan antar strain, dan intervensi isolasi khusus TB-RO dalam satu kerangka. Analisis yang dilakukan di antaranya menentukan titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar dengan *next generation matrix*, analisis kestabilan, dan simulasi numerik. Diperoleh tiga titik kesetimbangan: bebas penyakit, monoeksistensi TB-RO, dan koeksistensi kedua strain. Analisis kestabilan di tiap titik kesetimbangan dilakukan dengan bantuan nilai R_0 . Analisa kestabilan dilakukan melalui syarat nilai parameter dari laju penularan TB-SO (β_s) dan laju penularan TB-RO (β_r). Analisis sensitivitas menunjukkan bahwa penurunan β_s dan β_r berdampak besar menekan penyebaran TB-SO dan TB-RO, peningkatan σ juga berdampak besar dalam menekan penularan TB-RO melalui isolasi kasus TB-RO.

Kata Kunci: model matematika; analisis kestabilan lokal; tuberkulosis sensitif obat; tuberkulosis resisten obat.

1. PENDAHULUAN

Tuberkulosis (TB) merupakan penyakit infeksi menular yang disebabkan oleh *Mycobacterium Tuberculosis*. Tuberkulosis menjadi masalah kesehatan masyarakat karena penularannya masih terjadi secara berkelanjutan dan berdampak pada kualitas hidup penderita. Tuberkulosis masih menjadi masalah kesehatan tingkat nasional hingga global. Saat ini Indonesia menduduki peringkat kedua sebagai kasus dengan beban TB tertinggi setelah India (WHO, 2024). Diperkirakan sebanyak 1.090.000 kasus TB dan 125.000 kematian per tahun (Kemenkes RI, 2025).

Tuberkulosis memiliki potensi penularan yang tinggi karena kuman dapat menyebar melalui udara yaitu melalui droplet yang keluar pada penderita. *Mycobacterium tuberculosis* masuk melalui saluran pernapasan menuju paru-paru dan menyebar ke bagian tubuh lainnya (Latifah et al., 2022). Tetapi tidak semua individu langsung mengalami TB aktif ketika telah terjadi paparan. Sebagian besar individu memasuki fase laten yaitu kondisi ketika bakteri berada dalam tubuh tetapi belum menunjukkan gejala dan individu belum menjadi sumber penularan. TB laten dapat bertahan dalam waktu lama, tetapi pada kondisi tertentu dapat mengalami reaktivasi menjadi TB aktif (Ilham et al., 2022). Sehingga fase laten juga berperan sebagai kasus potensial yang dapat mengalami reaktivasi menjadi TB aktif di kemudian hari dan memengaruhi penyebaran TB dalam jangka panjang.

Imunisasi BCG (*Bacillus Calmette-Guerin*) merupakan salah satu langkah dalam pencegahan infeksi tuberkulosis. BCG merupakan vaksin yang dibuat dari bakteri hidup yang sudah dilemahkan serta perlindungannya dapat bertahan selama beberapa tahun setelah pemberian vaksin (Bamford et al., 2020). Semakin berkembangnya strain baru, kekuatan vaksin BCG semakin menurun di beberapa negara berkembang (Fatahillah et al., 2022). Tantangan penanggulangan TB semakin meningkat dengan adanya kasus TB Resisten Obat. Menurut laporan WHO (2022), Indonesia termasuk 10 negara dengan kontribusi terbesar terhadap 70% beban TB resistan obat global dengan insiden sekitar 24.000 kasus, sehingga menjadi masalah kesehatan masyarakat yang serius (WHO, 2022). Berdasarkan tingkat kepekaan bakteri terhadap obat, TB diklasifikasikan menjadi TB Sensitif Obat (TB-SO) dan TB Resisten Obat (TB-RO). Penularan TB-RO melalui mekanisme yang sama seperti TB-SO tetapi perlu penanganan yang lebih kompleks karena memerlukan regimen terapi yang lebih lama, lebih banyak jenis obat, dan pemantauan yang lebih ketat. (Kemenkes, 2020).

Sejumlah individu memiliki resiko tinggi terkena TB-RO akibat riwayat dan terapi sebelumnya. Pengobatan TB yang gagal menjadi salah satu penyebab besarnya penyebaran TB dan juga menimbulkan bertambahnya penderita TB-RO (Mahartati & Syarif, 2024). Kelompok yang beresiko tinggi terhadap TB-RO merupakan individu penderita TB yang tidak mematuhi aturan pengobatan, penderita yang mengalami TB kembali setelah pernah menjalani pengobatan, individu yang tinggal di wilayah dengan

kasus TB-RO tinggi, serta individu yang melakukan kontak erat dengan penderita TB-RO, sehingga penularan dan kemunculan kasus TB-RO sangat dipengaruhi oleh kepatuhan pengobatan dan paparan terhadap kasus infeksius. Maka untuk mengontrol penularan ialah mengurangi paparan populasi kasus TB-RO pada populasi sehat, salah cara untuk menekan rantai penularan yaitu dengan mengisolasi individu terinfeksi TB-RO sebagai bagian dari strategi memutus rantai penularan (Bhadauria et al., 2023).

Untuk mengetahui dinamika penyebaran tuberkulosis dan mengevaluasi strategi pengendaliannya dapat menggunakan model matematika. Beberapa penelitian telah mengembangkan model matematika penyebaran TB-SO dan TB-RO dengan fokus dan asumsi yang berbeda. Alfiniyah dkk. (2025) menyusun model $SVEI_S I_r R$ dengan adanya intervensi vaksinasi dan adanya asumsi vaksinasi tidak sempurna sehingga ada mekanisme individu tervaksin dapat masuk ke kelas rentan, serta adanya mekanisme individu yang telah sembuh dapat kembali ke fase laten. Namun, model tersebut belum membedakan laju penularan antar strain maupun pemisahan fase laten yang spesifik untuk masing-masing strain. Bhadauria dkk. (2023) mengembangkan model $SI_S I_r QR$ dengan intervensi isolasi TB-RO, asumsi vaksinasi sempurna, serta menambahkan mekanisme individu yang sembuh dapat kembali ke kelas rentan. Bhadauria dkk (2023) juga menyebutkan keterbatasan penelitiannya yaitu tidak memasukkan fase laten dan masih mengasumsikan laju penularan yang sama untuk kedua strain. Kemudian penelitian Kuddus dkk. (2022) mengembangkan model $SE_S E_r I_S I_r R$ dengan membedakan laju penularan antar strain dan memasukkan fase laten spesifik strain. Selain itu, Mengistu dan Witbooi (2023) mengembangkan model $SVEI_S I_r$ yang mengasumsikan vaksinasi tidak sempurna dan menyederhanakan kesembuhan sebagai transisi kembali ke kelas rentan tanpa kompartemen kesembuhan yang terpisah.

Model-model TB dua strain pada penelitian sebelumnya umumnya belum mampu memuat secara bersamaan pemisahan fase laten spesifik strain, perbedaan laju penularan antar strain, serta intervensi vaksinasi dan isolasi untuk TB-RO dalam satu kerangka. Akibatnya, kontribusi TB-SO dan TB-RO terhadap penularan serta dampak intervensi pada masing-masing strain belum dapat ditelaah secara jelas dalam satu model terpadu. Pemisahan laten spesifik strain diperlukan karena fase laten TB berperan sebagai reservoir yang dapat bereaktivasi, dan dinamika reaktivasi maupun kontribusinya terhadap kasus aktif dapat berbeda antar strain.

Berdasarkan alasan tersebut, penelitian ini merumuskan model baru TB dua strain dengan mengadaptasi struktur model kompartemen pada Alfiniyah (2025) dan melakukan modifikasi yang berlandaskan pertimbangan epidemiologis. Penambahan kompartemen laten yang berbeda antar strain, sebagaimana diadaptasi dari Kuddus (2022), didasarkan pada karakteristik biologis TB yang memiliki fase laten yang berperan penting dalam dinamika penularan, terutama pada strain resistan obat yang lebih sulit dikendalikan. Perbedaan laju penularan antar strain dilakukan untuk

merepresentasikan perbedaan karakteristik epidemiologis antara TB-SO dan TB-RO dalam populasi. Selain itu, intervensi isolasi khusus TB-RO yang diadaptasi dari Bhadauria (2023) dimasukkan untuk merepresentasikan kebutuhan pengendalian yang lebih ketat dalam menekan penularan TB-RO. Secara konseptual, struktur model ini juga akan memengaruhi threshold epidemiologis, karena kontribusi masing-masing strain terhadap penularan dapat dianalisis secara terpisah.

2. METODE PELAKSANAAN

Penelitian ini dilakukan dengan studi literatur dari berbagai penelitian yang membahas tentang model matematika penyebaran penyakit tuberkulosis dua strain. Studi literatur ini dilakukan untuk mendapatkan informasi dan data referensi.

Pengumpulan data dilakukan dengan mengumpulkan informasi dari artikel ilmiah penelitian-penelitian terdahulu yang relevan. Pada penelitian ini berisi beberapa tahapan seperti studi literatur penelitian terdahulu, menyusun asumsi, menyusun diagram kompartemen, membangun model matematika, menentukan kepositifan solusi, daerah layak biologis serta keterbatasan solusi, menentukan titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan, melakukan simulasi numerik dengan bantuan *software* MAPLE 2024, serta mengambil kesimpulan.

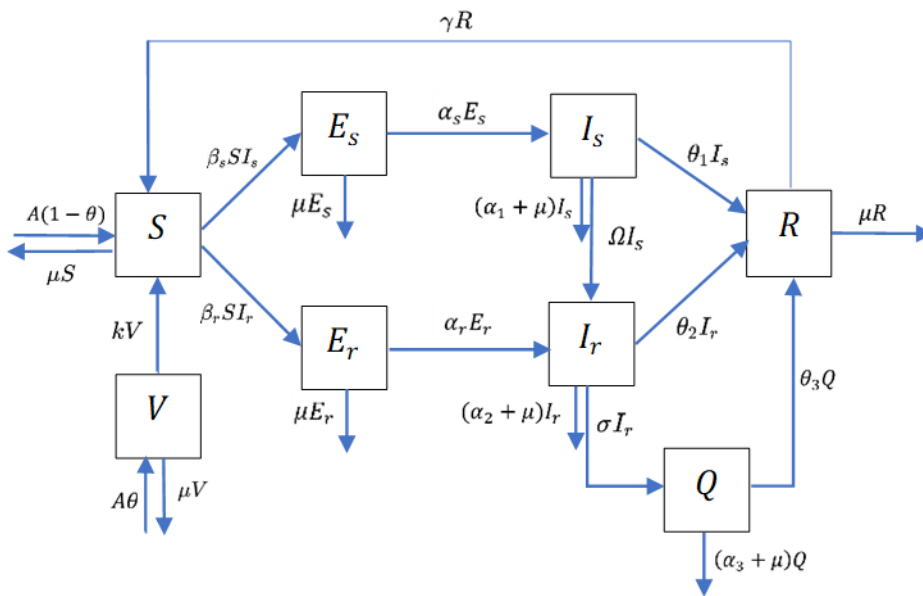
3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Asumsi dan Model Matematika

Model matematika dalam penelitian ini terdiri dari delapan kompartemen, yaitu subpopulasi individu rentan $S(t)$, subpopulasi individu tervaksinasi $V(t)$, subpopulasi individu laten TB-SO $E_s(t)$, subpopulasi individu laten TB-RO $E_r(t)$, subpopulasi individu terinfeksi aktif TB-SO $I_s(t)$, subpopulasi individu terinfeksi aktif TB-RO $I_r(t)$, subpopulasi individu terinfeksi TB-RO yang diisolasi $Q(t)$, dan subpopulasi individu yang sembuh dari tuberkulosis $R(t)$.

Dalam penelitian ini, terdapat asumsi-asumsi yang digunakan untuk memudahkan dalam tahap penyusunan model. Asumsi-asumsi yang digunakan yaitu : (1) Populasi bersifat tertutup, (2) Populasi individu tervaksinasi adalah individu yang menerima vaksin BCG dengan sukses, (3) Perlindungan vaksin terbatas sehingga individu yang telah divaksin dapat kembali menjadi rentan, (4) Penularan tuberkulosis hanya terjadi dari individu dengan TB aktif, fase laten tidak menularkan dan laju penularan antara TB-SO dan TB-RO berbeda, (5) Model ini membagi TB menjadi TB-SO dan TB-RO, dengan TB-RO mencakup kasus TB resisten obat tanpa pemisahan subtype resistensi, (6) Sebagian kasus infeksi TB-SO dapat berkembang menjadi TB-RO, (7) Kasus terinfeksi TB-RO membutuhkan diagnosis dan pengobatan khusus, sehingga individu terinfeksi TB-RO dapat masuk ke kelas isolasi, (8) Individu terisolasi diasumsikan tidak menularkan, (9) Kesembuhan terjadi melalui pengobatan dan individu yang sembuh

tidak punya kekebalan penuh sehingga dapat kembali ke kelas rentan, (10) Terdapat kematian alami dan kematian akibat infeksi Tuberkulosis. Maka dapat dibentuk diagram kompartemen sebagai berikut:



Gambar 1. Diagram Kompartemen

Sehingga dapat dibentuk persamaan diferensial biasa sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = A(1 - \theta) + kV - \beta_s S I_s - \beta_r S I_r - \mu S + \gamma R \tag{1}$$

$$\frac{dV}{dt} = A\theta - (k + \mu)V \tag{2}$$

$$\frac{dE_s}{dt} = \beta_s S I_s - (\xi_s + \mu)E_s \tag{3}$$

$$\frac{dE_r}{dt} = \beta_r S I_r - (\xi_r + \mu)E_r \tag{4}$$

$$\frac{dI_s}{dt} = \xi_s E_s - \Lambda_1 I_s \tag{5}$$

$$\frac{dI_r}{dt} = \xi_r E_r + \Omega I_s - \Lambda_2 I_r \tag{6}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \sigma I_r - \Lambda_3 Q \tag{7}$$

$$\frac{dR}{dt} = \theta_1 I_s + \theta_2 I_r + \theta_3 Q - (\mu + \gamma)R \tag{8}$$

di mana $\Lambda_1 = \alpha_1 + \mu + \theta_1 + \Omega$, $\Lambda_2 = \alpha_2 + \mu + \theta_2 + \sigma$, $\Lambda_3 = \alpha_3 + \mu + \theta_3$

Semua parameter pada persamaan-persamaan di atas diasumsikan non-negatif dengan nilai awal $S(0) \geq 0, V(0) \geq 0, E_s(0) \geq 0, E_r(0) \geq 0, I_s(0) \geq 0, I_r(0) \geq 0, Q(0) \geq 0, R(0) \geq 0$.

Tabel 1. Deskripsi Parameter

| Parameter | Keterangan |
|------------|---|
| A | Laju kelahiran alami |
| θ | Laju vaksinasi |
| μ | Laju kematian alami |
| k | Laju kehilangan kekebalan vaksin |
| β_s | Laju penularan TB-SO |
| β_r | Laju penularan TB-RO |
| ξ_s | Laju progresi TB laten sensitif obat menjadi TB aktif sensitif obat |
| ξ_r | Laju progresi TB laten resisten obat menjadi TB aktif resisten obat |
| θ_1 | Laju kesembuhan individu yang terinfeksi TB-SO |
| θ_2 | Laju kesembuhan individu yang terinfeksi strain TB-RO |
| θ_3 | Laju kesembuhan individu TB-RO yang diisolasi |
| σ | Laju isolasi individu TB-RO |
| Ω | Laju subpopulasi TB-SO menjadi TB-RO |
| γ | Laju kehilangan imunitas |
| α_1 | Laju kematian akibat TB-SO |
| α_2 | Laju kematian akibat TB-RO |
| α_3 | Laju kematian individu terinfeksi TB-RO yang diisolasi |

3.2 Kepositifan Solusi, Daerah Layak Biologis, dan Keterbatasan Solusi

Didefinisikan total populasi: $N(t) = S(t) + V(t) + E_s(t) + E_r(t) + I_s(t) + I_r(t) + Q(t) + R(t)$.

Lemma 1. Kepositifan Solusi: Untuk setiap kondisi awal $(S(0), V(0), E_s(0), E_r(0) \geq 0, I_s(0), I_r(0), Q(0), R(0)) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^8$, maka solusi sistem (1)-(8) tetap non-negatif $\forall t \geq 0$.

Bukti: $\frac{dS}{dt}|_{S=0} = A(1 - \theta) + kV + \gamma R \geq 0$; $\frac{dV}{dt}|_{V=0} = A\theta \geq 0$; $\frac{dE_s}{dt}|_{E_s=0} = \beta_s SI_s \geq 0$; $\frac{dE_r}{dt}|_{E_r=0} = \beta_r SI_r$.
 $\frac{dI_s}{dt}|_{I_s=0} = \xi_s E_s \geq 0$; $\frac{dI_r}{dt}|_{I_r=0} = \xi_r E_r + \Omega I_s \geq 0$; $\frac{dQ}{dt}|_{Q=0} = \sigma I_r \geq 0$; $\frac{dR}{dt}|_{R=0} = \theta_1 I_s + \theta_2 I_r + \theta_3 Q \geq 0$. Karena semua turunan pada bidang batas bernilai non-negatif, tidak ada solusi yang dapat keluar dari daerah non-negatif.

Lemma 2. Keterbatasan Solusi: Total populasi $N(t)$ terbatas untuk semua $t \geq 0$ dan memenuhi $\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \frac{A}{\mu}$.

Bukti: $\frac{dN}{dt} = A(t) - \mu N(t) - \alpha_1 I_s(t) - \alpha_2 I_r(t) - \alpha_3 Q(t)$. Karena $\alpha_1 I_s - \alpha_2 I_r - \alpha_3 Q \geq 0$ maka $\frac{dN}{dt} \leq A(t) - \mu N(t)$. Dari pertidaksamaan ini didapatkan batas: $N(t) \leq \frac{A}{\mu} + (N(0) - \frac{A}{\mu})e^{-\mu t}$. Untuk $t \rightarrow \infty$, diperoleh $N(t) \leq \frac{A}{\mu}$.

Teorema. Daerah Layak Biologis: Himpunan $m = \{(S, V, E_s, E_r, I_s, I_r, Q, R) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^8 : S + V + E_s + E_r + I_s + I_r + Q + R \leq \frac{A}{\mu}\}$ bersifat invarian positif dan terbatas.

Bukti: Dari lemma 1, semua solusi tetap non-negatif. Dan dari lemma 2, saat $N = \frac{A}{\mu}$ diperoleh $\frac{dN}{dt} \leq 0$, sehingga solusi tidak dapat melebihi batas tersebut. Jadi m adalah daerah invarian positif.

3.3 Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit adalah kondisi di mana tidak ada individu yang terinfeksi tuberkulosis dalam populasi. Untuk mendapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu dengan mencari solusi dari persamaan (1)-(8) yaitu membuat tiap persamaan sama dengan nol. Maka $\frac{dS}{dt} = \frac{dV}{dt} = \frac{dE_s}{dt} = \frac{dE_r}{dt} = \frac{dI_s}{dt} = \frac{dI_r}{dt} = \frac{dQ}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$. Sehingga didapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu:

$$T_0 = (S_0, V_0, E_{s_0}, E_{r_0}, I_{s_0}, I_{r_0}, Q_0, R_0) = \left(\frac{A(k+\mu(1-\theta))}{\mu(k+\mu)}, \frac{A\theta}{k+\mu}, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right)$$

3.3 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar (R_0) adalah nilai ambang yang digunakan dalam menentukan penyebaran penyakit pada suatu populasi. Untuk memperoleh nilai R_0 menggunakan metode *Next Generation Matrix* (NGM) diambil subsistem yang terdiri dari kompartemen terinfeksi yaitu dengan mengambil persamaan (3)-(7). Dinyatakan matriks

$$F = \begin{bmatrix} \beta_s I_s \\ \beta_r I_r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan matriks } V = \begin{bmatrix} (\xi_s + \mu)E_s \\ (\xi_r + \mu)E_r \\ \Lambda_1 I_s - \xi_s E_s \\ \Lambda_2 I_r - \xi_r E_r - \Omega I_s \\ \Lambda_3 Q - \sigma I_r \end{bmatrix}. \text{ Kemudian dilakukan linearisasi maka}$$

$$\text{didapatkan matriks } F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_s S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_r S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan matriks } V = \begin{bmatrix} \xi_s + \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_r + \mu & 0 & 0 & 0 \\ -\xi_s & 0 & \Lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi_r & -\Omega & \Lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma & \Lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$N = FV^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_s S \xi_s}{(\xi_s + \mu) \Lambda_1} & 0 & \frac{\beta_s S}{\Lambda_1} & 0 & 0 \\ \frac{\beta_r S \Omega \xi_s}{(\xi_s + \mu) \Lambda_1 \Lambda_2} & \frac{\beta_r S \xi_r}{(\xi_r + \mu) \Lambda_2} & \frac{\beta_r S \Omega}{\Lambda_1 \Lambda_2} & \frac{\beta_r S}{\Lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_3 \end{bmatrix}. \text{ Selanjutnya nilai eigen dari matriks } N$$

diperoleh dengan menyelesaikan $|N - \lambda I| = 0$. Didapat nilai eigennya yaitu $\lambda_{1,2,3} = 0, \lambda_4 = \frac{\beta_s S \xi_s}{(\xi_s + \mu) \Lambda_1}, \lambda_5 = \frac{\beta_r S \xi_r}{(\xi_r + \mu) \Lambda_2}$. Maka $R_0 = \rho(FV^{-1}) = \max\left(0, 0, 0, \frac{\beta_s S \xi_s}{(\xi_s + \mu) \Lambda_1}, \frac{\beta_r S \xi_r}{(\xi_r + \mu) \Lambda_2}\right)$. Diperoleh nilai R_0 yang mewakili masing-masing strain. Untuk TB-SO yaitu $R_{0s} = \frac{\beta_s \xi_s A((k+\mu(1-\theta)))}{\mu(k+\mu)(\xi_s + \mu) \Lambda_1}$ menyatakan jumlah rata-rata infeksi baru TB-SO yang dihasilkan oleh satu individu TB-SO dan untuk TB-RO yaitu $R_{0r} = \frac{\beta_r \xi_r A((k+\mu(1-\theta)))}{\mu(k+\mu)(\xi_r + \mu) \Lambda_2}$. Secara biologis, R_{0s} dan R_{0r} menyatakan rata-rata jumlah infeksi sekunder yang dihasilkan oleh satu individu terinfeksi dalam populasi bebas penyakit.

3.4 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas penyakit didapat dengan mencari nilai eigen dari matriks *Jacobian* pada persamaan (1) – (8). Titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal jika seluruh nilai eigen dari matriks *Jacobian*

bernilai negatif. Dengan substitusi titik kesetimbangan bebas penyakit T_0 ke dalam matriks *Jacobian* sehingga didapat:

$$J(T_0) = \begin{bmatrix} -\mu & k & 0 & 0 & \frac{-\beta_s A((k+\mu(1-\theta)))}{\mu(k+\mu)} & -\frac{\beta_r A((k+\mu(1-\theta)))}{\mu(k+\mu)} & 0 & \gamma \\ 0 & -(k+\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\xi_s + \mu) & 0 & \frac{\beta_s A((k+\mu(1-\theta)))}{\mu(k+\mu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\xi_r + \mu) & 0 & \frac{\beta_r A((k+\mu(1-\theta)))}{\mu(k+\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_s & 0 & -\Lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_r & \Omega & -\Lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma & -\Lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & -(\mu + \gamma) \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks $J(T_0)$ dapat ditentukan dengan menyelesaikan persamaan karakteristik $|\lambda I - J(T_0)| = 0$. Sehingga didapat beberapa nilai eigen yang bernilai negatif yaitu $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_2 = -(k + \mu)$, $\lambda_3 = -(\mu + \gamma)$, $\lambda_4 = -\Lambda_3$, dua pasang nilai eigen lainnya merupakan akar dari polinom derajat dua $P_1(\lambda)$ dan $P_2(\lambda)$.

$P_1(\lambda) = \lambda^2 + ((\xi_s + \mu) + \Lambda_1)\lambda + ((\xi_s + \mu)\Lambda_1 - (\frac{\beta_s A((k+\mu(1-\theta)))}{\mu(k+\mu)})\xi_s) = 0$. Sehingga kriteria kestabilan untuk polinomial berderajat 2 harus memenuhi :

$$(\xi_s + \mu) + \Lambda_1 > 0 \text{ dan } (\xi_s + \mu)\Lambda_1 - (\frac{\beta_s A((k+\mu(1-\theta)))}{\mu(k+\mu)})\xi_s > 0 \Leftrightarrow R_{0s} < 1.$$

$$\text{Untuk } P_2(\lambda) : P_2(\lambda) = \lambda^2 + ((\xi_r + \mu) + \Lambda_2)\lambda + ((\xi_r + \mu)\Lambda_2 - (\frac{\beta_r A((k+\mu(1-\theta)))}{\mu(k+\mu)})\xi_r) = 0$$

Sehingga kriteria kestabilannya harus memenuhi:

$$(\xi_r + \mu) + \Lambda_2 > 0 \text{ dan } (\xi_r + \mu)\Lambda_2 - (\frac{\beta_r A((k+\mu(1-\theta)))}{\mu(k+\mu)})\xi_r > 0 \Leftrightarrow R_{0r} < 1$$

Maka titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik lokal jika $R_{0s} < 1$ dan $R_{0r} < 1$.

3.5 Titik Kesetimbangan Endemik Monoeksistensi

Pada kondisi ini hanya ada satu strain yang ada dalam populasi, sementara strain yang lain akan hilang.

Kasus 1 : Titik Kesetimbangan Monoeksistensi TB-SO

Pada kondisi ini hanya terdapat strain TB-SO yang hidup dalam populasi, sementara untuk strain TB-RO tidak ada. Sehingga syarat yang harus dipenuhi $I_s > 0$ dan $I_r = 0$. Akan dibuktikan eksistensi titik ini dengan mensubstitusikan $I_r = 0$ ke persamaan (4) yaitu: $\beta_r S I_r - (\xi_r + \mu) E_r = 0 \Leftrightarrow E_r = 0$. Kemudian substitusikan $E_r = 0$ dan $I_r = 0$ ke persamaan (6) didapat: $\xi_r E_r + \Omega I_s - \Lambda_2 I_r = 0 \Leftrightarrow I_s = 0$. Sehingga kontradiksi dengan syarat $I_s > 0$. Maka titik kesetimbangan monoeksistensi TB-SO tidak eksis.

Kasus 2 : Titik Kesetimbangan Monoeksistensi TB-RO

Pada kondisi ini hanya terdapat strain TB-RO yang hidup dalam populasi, sementara strain TB-SO tidak ada. Maka berlaku syarat $I_s = 0$ dan $I_r > 0$. Sehingga titik kesetimbangan endemik monoeksistensi TB-RO didapat: $T_1 = (S^*, V^*, E_s^*, E_r^*, I_s^*, I_r^*, Q^*, R^*)$

$$\text{di mana: } S^* = \frac{(\xi_r + \mu)\Lambda_2}{\beta_r \xi_r}, \quad V^* = \frac{A\theta}{k + \mu}, \quad E_s^* = 0, \quad E_r^* = \frac{\Lambda_2 I_r^*}{\xi_r}, \quad I_s^* = 0, \quad I_r^* = \frac{\left(\frac{A(k+\mu-\mu\theta)}{(k+\mu)}\right)\left(\frac{R_{0r}-1}{R_{0r}}\right)}{\left(\frac{\xi_r + \mu}{\xi_r}\right)\Lambda_2 - \gamma\left(\frac{\theta_2 + \frac{\theta_3 \sigma}{\mu + \gamma}}{\mu + \gamma}\right)}$$

$Q^* = \frac{\sigma}{\Lambda_3} I_r^*$, $R^* = \frac{\theta_2 + \frac{\theta_3 \sigma}{\Lambda_3}}{\mu + \gamma} I_r^*$. T_1 merupakan titik kesetimbangan monoeksistensi TB-RO yang

eksis jika dan hanya jika: $R_{0r} > 1$ dan $\left(\frac{\xi_r + \mu}{\xi_r}\right) \Lambda_2 > \gamma \left(\frac{\theta_2 + \frac{\theta_3 \sigma}{\Lambda_3}}{\mu + \gamma}\right)$. Secara epidemiologis, kondisi ini memberikan dominansi TB-RO dalam populasi. Syarat $R_{0r} > 1$ bermakna TB-RO mampu mempertahankan penularan di mana satu kasus TB-RO rata-rata menghasilkan lebih dari satu infeksi pada populasi rentan.

3.6 Titik Kesetimbangan Endemik Koeksistensi TB-SO dan TB-RO

Pada kondisi ini kedua strain yaitu TB-SO dan TB-RO bertahan dalam populasi secara bersamaan. Sehingga pada titik ini berlaku $I_s > 0$ dan $I_r > 0$. Sehingga titik kesetimbangan koeksistensi TB-SO dan TB-RO yaitu : $T_2 = (S^\#, V^\#, E_s^\#, E_r^\#, I_s^\#, I_r^\#, Q^\#, R^\#)$ di mana:

$$S^\# = \frac{(\xi_s + \mu)\Lambda_1}{\beta_s \xi_s}, \quad V^\# = \frac{A\theta}{k + \mu}, \quad E_s^\# = \frac{\Lambda_1 \Lambda_2}{\xi_s \Omega} \left(1 - \frac{R_{0r}}{R_{0s}}\right) I_r^\#, \quad E_r^\# = \frac{R_{0r} \Lambda_2 I_r^*}{R_{0s} \xi_r}, \quad I_s^\# = \frac{\Lambda_2 \left(1 - \frac{R_{0r}}{R_{0s}}\right) I_r^*}{\Omega},$$

$$I_r^\# = \frac{\left(\frac{A(k + \mu - \mu\theta)}{(k + \mu)}\right) \left(\frac{R_{0s} - 1}{R_{0s}}\right)}{\left(\frac{(\xi_s + \mu)\Lambda_1 - \gamma\theta_1}{\xi_s} - \frac{\gamma\theta_1}{\mu + \gamma}\right) \frac{\Lambda_2}{\Omega} \left(1 - \frac{R_{0r}}{R_{0s}}\right) + \left(\beta_r \left(\frac{(\xi_s + \mu)\Lambda_1}{\beta_s \xi_s}\right) - \frac{\gamma}{\mu + \gamma} \left(\theta_2 + \frac{\theta_3 \sigma}{\Lambda_3}\right)\right)}, \quad Q^\# = \frac{\sigma}{\Lambda_3} I_r^\#, \quad R^\# = \frac{\theta_1 I_s^\# \left(\theta_2 + \frac{\theta_3 \sigma}{\Lambda_3}\right) I_r^\#}{\mu + \gamma}$$

T_2 merupakan titik kesetimbangan endemik koeksistensi TB-SO dan TB-RO yang eksis jika dan hanya jika:

$$R_{0s} > 1, \quad R_{0s} > R_{0r}, \quad \text{dan} \quad \left(\frac{(\xi_s + \mu)\Lambda_1}{\xi_s} - \frac{\gamma\theta_1}{\mu + \gamma}\right) \frac{\Lambda_2}{\Omega} \left(1 - \frac{R_{0r}}{R_{0s}}\right) > \left(\frac{\gamma}{\mu + \gamma} \left(\theta_2 + \frac{\theta_3 \sigma}{\Lambda_3}\right) - \beta_r \left(\frac{(\xi_s + \mu)\Lambda_1}{\beta_s \xi_s}\right)\right).$$

Adanya syarat $R_{0s} > 1$ bermakna TB-SO mampu mempertahankan penularan di mana satu kasus TB-SO rata-rata menghasilkan lebih dari satu infeksi pada populasi rentan. Syarat $R_{0s} > R_{0r}$ menggambarkan adanya keunggulan transmisi efektif TB-SO dibanding TB-RO, pada kondisi ini TB-SO tidak tersingkir sepenuhnya oleh TB-RO.

3.7 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik

Pada model multi-strain, analisis kestabilan lokal dapat dilakukan dengan mengidentifikasi nilai R_0 pada masing-masing titik kesetimbangan (Fudolig & Howard, 2020), selain itu dapat ditambahkan syarat kestabilan dengan suatu parameter acuan (Haq & Prawoto, 2022). Sehingga analisis kestabilan titik kesetimbangan endemik pada penelitian ini juga dapat dilakukan melalui nilai R_0 . Nilai R_0 mengacu pada nilai R_{0s} dan R_{0r} . Dari nilai R_0 juga didapatkan syarat kestabilan dengan parameter acuan β_s yaitu laju penularan individu terinfeksi TB-SO dan β_r yaitu laju penularan individu terinfeksi TB-RO. Pada titik kesetimbangan endemik monoeksistensi syarat yang harus dipenuhi yaitu $R_{0r} > 1$ dan $R_{0s} < 1$. Sehingga syarat kestabilan kondisi monoeksistensi TB-RO jika: $\beta_r > \frac{\mu(k + \mu)(\xi_r + \mu)\Lambda_2}{\xi_r A((k + \mu)(1 - \theta))}$ dan $\beta_s < \frac{\mu(k + \mu)(\xi_s + \mu)\Lambda_1}{\xi_s A((k + \mu)(1 - \theta))}$. Sedangkan pada titik kesetimbangan endemik koeksistensi syarat yang harus dipenuhi yaitu $R_{0s} > 1$ dan $R_{0r} > 1$. Maka syarat kondisi koeksistensi TB-RO dan TB-SO jika: $\beta_r > \frac{\mu(k + \mu)(\xi_r + \mu)\Lambda_2}{\xi_r A((k + \mu)(1 - \theta))}$ dan $\beta_s > \frac{\mu(k + \mu)(\xi_s + \mu)\Lambda_1}{\xi_s A((k + \mu)(1 - \theta))}$.

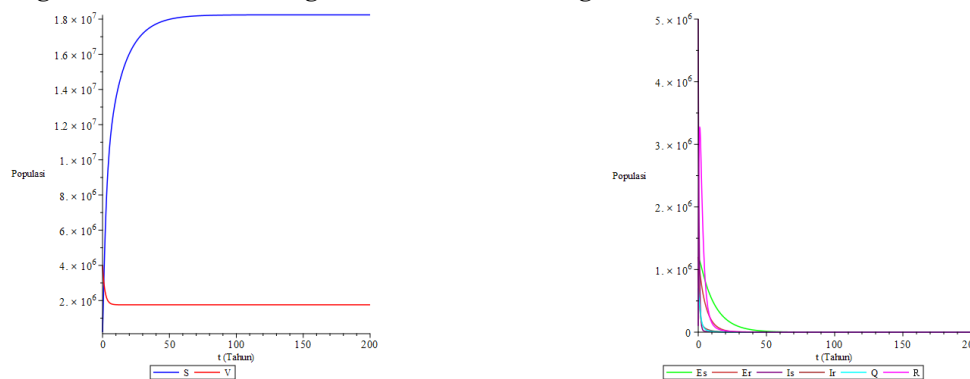
3.8 Simulasi Numerik

Untuk memverifikasi perhitungan analitik sebelumnya, akan dilakukan simulasi numerik. Simulasi numerik menggunakan *software* Maple 2024. Nilai awal yang digunakan merujuk pada penelitian (Bhadauria et al., 2023), (Alfiniyah et al., 2025), serta simulasi dari peneliti yaitu: $S(0) = 6 \times 10^4, V(0) = 4 \times 10^6, L_s(0) = 1.2 \times 10^6, L_r(0) = 1.2 \times 10^6, I_s(0) = 5 \times 10^6, I_r(0) = 1 \times 10^6, Q(0) = 0.7 \times 10^6, R(0) = 1 \times 10^5$. Nilai parameter yang digunakan disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 2. Nilai Parameter

| Parameter | Nilai | Satuan | Sumber |
|------------|-----------------------|--------------------|----------------------------|
| A | 1.4×10^6 | individu/tahun | (Mengistu & Witbooi, 2023) |
| θ | 0.715 | - | (Mengistu & Witbooi, 2023) |
| μ | 0.07 | 1/tahun | (Mengistu & Witbooi, 2023) |
| k | 0.5 | 1/tahun | (Mengistu & Witbooi, 2023) |
| β_s | 1.57×10^{-8} | 1/(individu-tahun) | (Kuddus et al., 2022) |
| β_r | 6.25×10^{-9} | 1/(individu-tahun) | (Kuddus et al., 2022) |
| ξ_s | 0.023 | 1/tahun | (Mengistu & Witbooi, 2023) |
| ξ_r | 0.129 | 1/tahun | (Kuddus et al., 2022) |
| θ_1 | 1.5 | 1/tahun | (Alfiniyah et al., 2025) |
| θ_2 | 0.48 | 1/tahun | (Bhadauria et al., 2023) |
| θ_3 | 0.48 | 1/tahun | (Bhadauria et al., 2023) |
| σ | 0.5 | 1/tahun | (Bhadauria et al., 2023) |
| Ω | 0.035 | 1/tahun | (Bhadauria et al., 2023) |
| γ | 0.42 | 1/tahun | (Bhadauria et al., 2023) |
| α_1 | 0.03 | 1/tahun | (Bhadauria et al., 2023) |
| α_2 | 0.14 | 1/tahun | (Bhadauria et al., 2023) |
| α_3 | 0.5 | 1/tahun | Asumsi |

Dengan menggunakan nilai parameter pada tabel 2 kondisi ini memenuhi syarat untuk analisis kestabilan di titik kesetimbangan bebas penyakit dengan $R_{0s} = 0.043$ dan $R_{0r} = 0.062$. Dengan demikian hasil grafik simulasi sebagai berikut:

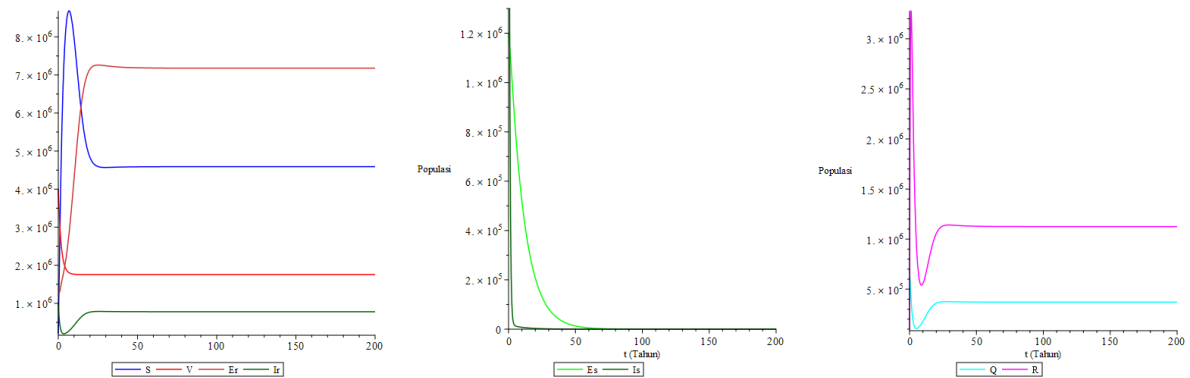


Gambar 2. Simulasi Bebas Penyakit dengan t = 200 tahun

Berdasarkan Gambar 2 menunjukkan bahwa grafik solusi numerik menuju titik kesetimbangan bebas penyakit $T_0 = (18243859.6; 1756140.3; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0)$, terbukti bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik lokal. Gambar 2 menunjukkan simulasi sistem pada t = 200 tahun akan menuju nol pada garis infeksi

TB-SO dan TB-RO. Hal ini menunjukkan jumlah individu yang terinfeksi TB akan semakin berkurang dan akhirnya hilang seiring berjalannya waktu.

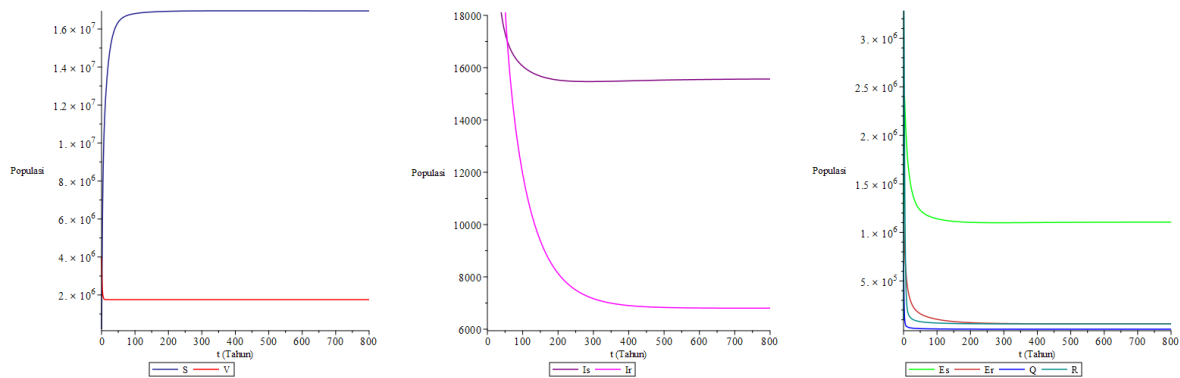
Kemudian syarat kestabilan titik kesetimbangan endemik monoeksistensi TB-RO diperoleh ketika $\beta_r > \frac{\mu(k+\mu)(\xi_r+\mu)\Lambda_2}{\xi_r A((k+\mu(1-\theta)))}$ dan $\beta_s < \frac{\mu(k+\mu)(\xi_s+\mu)\Lambda_1}{\xi_s A((k+\mu(1-\theta)))}$. Dengan mensubstitusikan nilai parameter pada tabel 2 didapat syarat $\beta_r > 3.623 \times 10^{-7}$ dan $\beta_s < 1.006 \times 10^{-7}$. Untuk memenuhi syarat maka diambil nilai $\beta_s = 1.57 \times 10^{-8}$ dan $\beta_r = 4 \times 10^{-7}$. Dan syarat eksistensi titik kesetimbangan monoeksistensi dipenuhi yaitu: $R_{0r} = 3.975 > 1$ dan $\left(\frac{\xi_r+\mu}{\xi_r}\right) \Lambda_2 > \gamma \left(\frac{\theta_2+\frac{\theta_3\sigma}{\Lambda_3}}{\mu+\gamma}\right) = 1.836 > 0.428$. Maka grafik simulasinya sebagai berikut:



Gambar 3. Simulasi Titik Kesetimbangan Endemik Monoeksistensi dengan t = 200 Tahun

Berdasarkan gambar 3 menunjukkan bahwa grafik solusi numerik stabil asimtotik lokal di sekitar titik kesetimbangan endemik monoeksistensi yaitu $T_1 = (4589341.09; 1756140.35; 0; 0; 7177870.02; 778105.24; 370526.303; 1125190.081)$. Pada gambar 3 terlihat bahwa jumlah individu yang terinfeksi TB-SO mengalami penurunan dan konstan menuju nol, sedangkan jumlah individu yang terinfeksi TB-RO sempat mengalami penurunan pada awal waktu kemudian meningkat secara signifikan dan akhirnya mencapai keadaan konstan. Sehingga pada kondisi ini dinamika penyakit dalam jangka panjang hanya didominasi oleh strain TB-RO sedangkan strain TB-SO akan punah dalam populasi.

Kemudian syarat kestabilan titik endemik koeksistensi TB-SO dan TB-RO diperoleh ketika $\beta_r > \frac{\mu(k+\mu)(\xi_r+\mu)\Lambda_2}{\xi_r A((k+\mu(1-\theta)))}$ dan $\beta_s > \frac{\mu(k+\mu)(\xi_s+\mu)\Lambda_1}{\xi_s A((k+\mu(1-\theta)))}$ dengan mensubstitusikan nilai parameter pada tabel 2 didapat syarat $\beta_r > 3.623 \times 10^{-7}$ dan $\beta_s > 1.006 \times 10^{-7}$. Diambil nilai yang memenuhi yaitu $\beta_s = 3.9 \times 10^{-7}$ dan $\beta_r = 1.01 \times 10^{-7}$. Didapatkan syarat eksistensi titik kesetimbangan endemik koeksistensi sebagai berikut: $R_{0s} = 1.076 > 1, R_{0s} > R_{0r} = 1.076 > 1.003, \left(\frac{(\xi_s+\mu)\Lambda_1}{\xi_s} - \frac{\gamma\theta_1}{\mu+\gamma}\right) \frac{\Lambda_2}{\Omega} \left(1 - \frac{R_{0r}}{R_{0s}}\right) > \left(\frac{\gamma}{\mu+\gamma} \left(\theta_2 + \frac{\theta_3\sigma}{\Lambda_3}\right) - \beta_r \left(\frac{(\xi_s+\mu)\Lambda_1}{\beta_s \xi_s}\right)\right) = 12.1943 > -0.4398$. Dengan demikian didapatkan grafik simulasi sebagai berikut:



Gambar 4. Simulasi Titik Kesetimbangan Endemik Koeksistensi dengan $t = 800$ Tahun

Berdasarkan gambar 4 menunjukkan bahwa grafik solusi numerik stabil asimtotik lokal di titik kesetimbangan endemik koeksistensi yaitu $T_2 = (1.695 \times 10^7; 1.756 \times 10^6; 1.107 \times 10^6; 58524.063; 15576.358; 6802.333; 3239.206; 57519.339)$. Pada gambar 4 dapat terlihat pada interval $t = 800$ subpopulasi terinfeksi TB-SO dan TB-RO akan tetap konstan dengan jumlah tertentu dan tidak menuju nol. Sehingga pada kondisi ini, TB-SO dan TB-RO akan endemik dalam populasi.

3.8 Analisis Sensitivitas

Analisis sensitivitas bertujuan menentukan parameter yang berpengaruh terhadap R_0 . Parameter yang paling berpengaruh menjadi faktor dominan dalam penularan penyakit. Rumus yang digunakan sebagai berikut:

$$\delta_{parameter} R_0 = \frac{\partial R_0}{\partial parameter} \times \frac{parameter}{R_0}$$

Dengan substitusi nilai pada tabel 2, hasil analisis sensitivitasnya sebagai berikut:

Tabel 3. Analisis Sensitivitas Terhadap R_{0s} dan R_{0r}

| Parameter | Indeks Sensitivitas | Pengaruh | Parameter | Indeks Sensitivitas | Pengaruh |
|------------|---------------------|---------------------|------------|---------------------|---------------------|
| A | 1.000 | $\uparrow R_{0s}$ | A | 1.000 | $\uparrow R_{0r}$ |
| β_s | 1.000 | $\uparrow R_{0s}$ | β_r | 1.000 | $\uparrow R_{0r}$ |
| ξ_s | 0.753 | $\uparrow R_{0s}$ | ξ_r | 0.352 | $\uparrow R_{0r}$ |
| k | 0.084 | $\uparrow R_{0s}$ | k | 0.084 | $\uparrow R_{0r}$ |
| θ | -0.096 | $\downarrow R_{0s}$ | θ | -0.096 | $\downarrow R_{0r}$ |
| θ_1 | -0.917 | $\downarrow R_{0s}$ | σ | -0.420 | $\downarrow R_{0r}$ |
| Ω | -0.021 | $\downarrow R_{0s}$ | θ_2 | -0.403 | $\downarrow R_{0r}$ |
| α_1 | -0.018 | $\downarrow R_{0s}$ | α_2 | -0.018 | $\downarrow R_{0r}$ |
| μ | -1.880 | $\downarrow R_{0s}$ | μ | -1.495 | $\downarrow R_{0r}$ |

Berdasarkan analisis sensitivitas, laju kelahiran alami A dan laju penularan TB-SO (β_s) dan TB-RO (β_r) merupakan parameter yang paling berpengaruh dalam meningkatkan bilangan reproduksi dasar, sehingga pengurangan penularan menjadi strategi pengendalian utama. Untuk TB-SO penurunan nilai R_{0s} terbesar diberikan oleh

parameter laju kesembuhan (θ_1). Untuk TB-RO penurunan nilai R_{0r} paling dipengaruhi oleh laju isolasi (σ) sehingga isolasi efektif menurunkan kasus TB-RO. Tingkat vaksinasi (θ) menurunkan R_{0s} dan R_{0r} tetapi pengaruhnya relatif kecil.

4. SIMPULAN

Pada model $SVE_s E_r I_s I_r QR$ ini didapatkan tiga titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit T_0 , titik kesetimbangan endemik monoeksistensi TB-RO (T_1), dan titik kesetimbangan endemik koeksistensi TB-SO dan TB-RO (T_2). Berdasarkan hasil analisis dan simulasi numerik diketahui bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit (T_0) stabil asimtotik lokal jika $R_{0s} < 1$ dan $R_{0r} < 1$. Titik kesetimbangan endemik monoeksistensi TB-RO stabil asimtotik lokal ketika $\beta_r > \frac{\mu(k+\mu)(\xi_r+\mu)\Lambda_2}{\xi_r A((k+\mu(1-\theta)))}$ dan $\beta_s < \frac{\mu(k+\mu)(\xi_s+\mu)\Lambda_1}{\xi_s A((k+\mu(1-\theta)))}$. Titik kesetimbangan endemik koeksistensi TB-SO dan TB-RO akan stabil asimtotik lokal ketika $\beta_r > \frac{\mu(k+\mu)(\xi_r+\mu)\Lambda_2}{\xi_r A((k+\mu(1-\theta)))}$ dan $\beta_s > \frac{\mu(k+\mu)(\xi_s+\mu)\Lambda_1}{\xi_s A((k+\mu(1-\theta)))}$. Hasil numerik penelitian ini sesuai dengan hasil perhitungan analitik. Dengan analisis sensitivitas, peningkatan nilai β_s dan β_r berdampak besar dalam menekan penyebaran TB, peningkatan nilai σ efektif menurunkan penularan TB-RO melalui isolasi kasus TB-RO.

5. UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih kepada dosen pembimbing yang telah memberikan arahan dalam mengerjakan penelitian ini.

6. REKOMENDASI

Penelitian selanjutnya dapat memperdalam analisis mengenai fenomena *competitive dominance*, *threshold replacement*, dan *competitive exclusion principle* yang dalam penelitian ini tidak dibahas secara eksplisit. Selain itu, analisis kestabilan global dan pendekatan bifurkasi yang tidak dibahas dalam artikel ini juga menjadi topik menarik untuk dikaji lebih lanjut guna memahami dinamika model secara lebih komprehensif.

7. REFERENSI

- Alfiniyah, C., Permatasari, N. A., & Farman, M. (2025). *Optimal control analysis of a tuberculosis model with drug-resistant population*. 13(March), 948–960. <https://doi.org/10.19139/soic-2310-5070-2292>
- Bamford, A., Dixon, G., Klein, N., Marks, S. D., Ritz, N., Welch, S. B., & Tebruegge, M. (2020). Preventing tuberculosis in paediatric kidney transplant recipients: is there a role for BCG immunisation pre-transplantation in low tuberculosis incidence countries? *Pediatric Nephrology*. <https://doi.org/10.1007/s00467-020-04844-5>
- Bhadauria, A. S., Dhungana, H. N., Verma, V., Woodcock, S., & Rai, T. (2023). Studying the efficacy of isolation as a control strategy and elimination of tuberculosis in India : A mathematical model. *Infectious Disease Modelling*, 8(2), 458–470. <https://doi.org/10.1016/j.idm.2023.03.005>
- Fatahillah, H., Andarini, I., & Hidayah, D. (2022). *Hubungan Imunisasi BCG dengan Tuberkulosis*

- Paru pada Anak Balita di RSUD Dr Moewardi*. 1(1), 18–23.
- Fudolig, M., & Howard, R. (2020). The local stability of a modified multi-strain SIR model for emerging viral strains. *PLOS ONE*, 1–27. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0243408>
- Haq, N. I., & Prawoto, B. P. (2022). Analisa Kestabilan Model Penyebaran Covid-19 Dengan Varian Baru. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 10(2), 317–325. <https://doi.org/10.26740/mathunesa.v10n2.p317-325>
- Ilham, Russilawati, & Mizarti, D. (2022). Tatalaksana Infeksi TB Laten. *Human Care Journal*, 7(1), 165–180. <https://doi.org/10.32883/hcj.v7i1.1490>
- Kemendes. (2020). *Petunjuk Teknis Penatalaksanaan Tuberkulosis Resisten Obat di Indonesia*.
- Kemendes RI. (2025). *Gerakan Indonesia Akhiri TBC*. Kementerian Kesehatan Republik Indonesia. <https://kemkes.go.id/id/gerakan-indonesia-akhiri-tbc>
- Kuddus, A., McBryde, E. S., Adekunle, A. I., White, L. J., & Meehan, M. T. (2022). Mathematical analysis of a two - strain tuberculosis model in Bangladesh. *Scientific Reports*, 1–13. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-07536-2>
- Latifah, A., Kurniasih, D., Muslina, & Armizan, E. W. (2022). Sosialisasi Cara Pencegahan dan Penularan Penyakit Tuberkulosis serta Upaya Peningkatan Mikroelemen Tubuh bagi Penderita Tuberkulosis. *Jurnal Pengabdian kepada Masyarakat (ABDIKEMAS)*, 4(2). <https://doi.org/10.36086/j.abdikemas.v4i2>
- Mahartati, N. M. N., & Syarif, S. (2024). Faktor Risiko Kegagalan Pengobatan Tuberkulosis: Systematic Review. *MPPKI: Media Publikasi Promosi Kesehatan Indonesia*, 7(4), 899–906. <https://doi.org/doi.org/10.56338/mppki.v7i4.5157>
- Mengistu, A. K., & Witbooi, P. J. W. (2023). Cost-Effectiveness Analysis of the Optimal Control Strategies for Multidrug-Resistant Tuberculosis Transmission in Ethiopia. *International Journal of Differential Equations*, 2023, 15. <https://doi.org/10.1155/2023/8822433>
- WHO. (2022). *Global Tuberculosis Report 2022*.
- WHO. (2024). *Global Tuberculosis Report 2024*.