

Teori Dualitas Lagrange dalam Optimasi Non-Linier: Tinjauan Naratif dari Perspektif Analisis Geometris Modern

Aprilia Rahmawati¹, Sisca Octarina^{2*}, Fitri Maya Puspita³

¹ Mahasiswa Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Sriwijaya, Indralaya

² Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Sriwijaya, Indralaya

³ Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Sriwijaya, Indralaya

*0801138232812@student.unsri.ac.id.

Diterima: 25-02-2026; Direvisi: 09-04-2026; Dipublikasi: 10-05-2026

Abstract

Lagrangian duality theory constitutes a fundamental framework in nonlinear optimization analysis, connecting primal problems with dual problems through the Lagrange function. This article presents a comprehensive narrative review of Lagrangian duality theory development from the perspective of modern geometric analysis. We explore the geometric structure of primal-dual spaces, Karush-Kuhn-Tucker (KKT) optimality conditions, and strong and weak duality theorems in the context of constrained optimization. The discussion encompasses geometric interpretations of saddle points, convexity in duality theory, and the duality gap as a solution quality measure. Furthermore, we analyze theoretical applications from functional analysis and topology perspectives, including the role of reflexive Banach spaces and Fréchet differentiability in characterizing optimal solutions. The findings demonstrate that geometric approaches provide profound insights into optimization problem structures and open new perspectives in numerical algorithm development. This review contributes to a more robust theoretical understanding of the mathematical foundations of nonlinear optimization and its relevance in contemporary applied mathematics.

Keywords: lagrangian duality; nonlinear optimization; kkt conditions; geometric analysis; saddle point theory.

Abstrak

Teori dualitas Lagrange merupakan kerangka fundamental dalam analisis optimasi non-linier yang menghubungkan masalah primal dengan masalah dual melalui fungsi Lagrange. Artikel ini menyajikan tinjauan naratif komprehensif terhadap perkembangan teori dualitas Lagrange dari perspektif analisis geometris modern. Kami mengeksplorasi struktur geometris ruang primal-dual, kondisi optimalitas Karush-Kuhn-Tucker (KKT), dan teorema dualitas kuat serta lemah dalam konteks optimasi berkendala. Pembahasan mencakup interpretasi geometris dari saddle point, konveksitas dalam teori dualitas, serta gap dualitas sebagai ukuran kualitas solusi. Selain itu, Penelitian ini menganalisis aplikasi teoritis dari perspektif analisis fungsional dan topologi, termasuk peran ruang Banach refleksif dan diferensiabilitas Fréchet dalam karakterisasi solusi optimal. Hasil kajian menunjukkan bahwa pendekatan geometris memberikan wawasan mendalam terhadap struktur masalah optimasi dan membuka perspektif baru dalam pengembangan algoritma numerik. Tinjauan ini berkontribusi pada pemahaman teoritis yang lebih kokoh tentang fondasi matematis optimasi non-linier dan relevansinya dalam matematika terapan kontemporer.

Kata Kunci: dualitas lagrange; optimasi non-Linier; kondisi kkt; analisis geometris; teori saddle point.

1. PENDAHULUAN

Teori optimasi merupakan salah satu cabang matematika terapan yang memiliki perkembangan signifikan dalam beberapa dekade terakhir, dengan aplikasi yang meluas dari ekonomi, teknik, hingga pembelajaran mesin (R. Tyrrell Rockafellar, n.d.). Dalam konteks optimasi terkendala, teori dualitas Lagrange muncul sebagai instrumen analitis yang powerful untuk memahami struktur masalah dan mengkarakterisasi solusi optimal (Bertsekas, 2022). Pendekatan dual tidak hanya memberikan batas pada nilai optimal masalah primal, tetapi juga membuka jalan bagi pengembangan algoritma yang efisien untuk menyelesaikan masalah optimasi kompleks (Boyd, 2019).

Secara historis, metode pengali Lagrange yang diperkenalkan oleh Joseph-Louis Lagrange pada abad ke-18 telah menjadi fondasi dari teori optimasi modern. Namun, formulasi dual yang rigorous baru berkembang penuh pada pertengahan abad ke-20 melalui kontribusi Kuhn, Tucker, dan Karush yang merumuskan kondisi optimalitas yang kini dikenal sebagai kondisi KKT (*Karush-Kuhn-Tucker*) (Peypouquet, 2020). Perkembangan selanjutnya dalam analisis konveks dan teori titik pelana (*saddle point theory*) oleh Rockafellar dan peneliti lainnya memberikan landasan matematis yang kokoh untuk memahami relasi primal-dual (Heinz H. Bauschke, 2020).

Dari perspektif analisis geometris modern, teori dualitas dapat dipahami sebagai studi tentang struktur geometris ruang fungsi dan himpunan feasible dalam konteks optimasi. Interpretasi geometris ini tidak hanya memberikan intuisi visual yang kuat, tetapi juga memfasilitasi pengembangan teori yang lebih umum dalam *setting* ruang Banach dan ruang metrik (Attouch *et al.*, 2015). Khususnya, konsep konveksitas, kerucut normal, dan subdifferensial memainkan peran sentral dalam karakterisasi solusi optimal dan gap dualitas.

Tujuan penelitian ini adalah menyajikan tinjauan naratif yang komprehensif terhadap teori dualitas Lagrange dengan penekanan pada perspektif analisis geometris. Kami mengorganisasi pembahasan sebagai berikut: Bagian 2 membahas formulasi matematis masalah primal-dual dan fungsi Lagrange; Bagian 3 mengeksplorasi kondisi optimalitas KKT dan interpretasi geometrisnya; Bagian 4 membahas teorema dualitas kuat dan lemah beserta implikasinya; Bagian 5 menganalisis struktur geometris ruang primal-dual dari perspektif analisis fungsional; dan Bagian 6 menyajikan kesimpulan serta arah penelitian masa depan.

2. METODE PELAKSANAAN

Penelitian ini menggunakan metode tinjauan naratif (*narrative review*) yang bertujuan untuk mengkaji dan mensintesis perkembangan teori dualitas Lagrange dalam optimasi non-linier dari perspektif analisis geometris modern. Metode ini dipilih karena memungkinkan peneliti melakukan eksplorasi konseptual yang mendalam terhadap

teori, definisi, serta hasil-hasil utama tanpa terbatas pada prosedur meta-analisis kuantitatif.

2.1. Desain Penelitian

Desain penelitian bersifat kualitatif-deskriptif dengan pendekatan studi literatur. Artikel-artikel ilmiah, buku teks rujukan, dan publikasi ilmiah yang relevan digunakan sebagai sumber data utama. Fokus kajian diarahkan pada aspek teoritis dualitas Lagrange, kondisi optimalitas KKT, dualitas kuat dan lemah, serta interpretasi geometris dalam ruang Euclidean dan ruang Banach.

Alur langkah penelitian harus disajikan dalam bagian ini lengkap dengan keterangan. Keterangan gambar yang ditempatkan sebagai bagian dari judul gambar (keterangan gambar) bukan bagian dari gambar.

2.2. Teknik Pengumpulan Data

Tahapan pengumpulan data dilakukan melalui langkah-langkah berikut:

- a) Identifikasi kata kunci utama, antara lain Lagrangian duality, nonlinear optimization, KKT conditions, geometric analysis, dan saddle point theory.
- b) Penelusuran literatur melalui basis data ilmiah seperti Google Scholar, SpringerLink, ScienceDirect, dan arXiv.
- c) Seleksi literatur berdasarkan relevansi topik, tahun publikasi (2015–2024), dan kontribusi teoritis terhadap pengembangan teori dualitas Lagrange, antara lain merujuk pada karya-karya utama seperti Rockafellar & Wets (dalam *Variational Analysis*), Bauschke & Combettes (2020), Bertsekas (2022), Peypouquet (2020), serta Attouch, Buttazzo & Michaille (2015).
- d) Pengelompokan referensi berdasarkan tema pembahasan, seperti formulasi primal-dual, interpretasi geometris, dan generalisasi dalam ruang fungsi.

2.3. Teknik Analisis Data

Analisis data dilakukan dengan cara mengkaji secara kritis isi literatur terpilih, membandingkan konsep-konsep utama, serta mensintesis temuan-temuan teoritis ke dalam kerangka pembahasan yang sistematis. Hasil analisis disajikan secara deskriptif-analitis dengan menekankan hubungan antara formulasi matematis dan interpretasi geometris.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Formulasi Masalah Primal-dual Dan Fungsi Lagrange

a. Masalah Optimasi Primal

Dalam teori optimasi non-linier, kita mempertimbangkan masalah primal dalam bentuk umum sebagai berikut. Diberikan ruang Euclidean \mathbb{R}^n dengan $n \in \mathbb{N}$, fungsi objektif $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, fungsi kendala ketaksamaan $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ untuk $i = 1, 2, \dots, m$, dan fungsi kendala kesamaan $h_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ untuk $j = 1, 2, \dots, p$. Masalah primal (P) dapat diformulasikan sebagai:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } f(x) \\ & \text{subject to } g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \\ & \quad h_j(x) = 0, j = 1, \dots, p \\ & \quad x \in X \end{aligned}$$

dengan $X \subseteq \mathbb{R}^n$ adalah himpunan feasible dasar yang biasanya berupa himpunan konveks tertutup (Rockafellar & Wets, 2021). Nilai optimal dari masalah primal dinotasikan sebagai $p^* = \inf\{f(x) : x \in F\}$, di mana $F = \{x \in X : g_i(x) \leq 0, h_j(x) = 0\}$ adalah himpunan feasible lengkap.

Dari perspektif analisis geometris, himpunan F dapat dipandang sebagai irisan dari himpunan level dari fungsi-fungsi kendala. Struktur geometris F sangat bergantung pada sifat konveksitas fungsi g_i dan linearitas h_j . Dalam kasus konveks, di mana f dan g_i adalah fungsi konveks serta h_j adalah fungsi affine, himpunan F membentuk himpunan konveks yang memiliki sifat-sifat geometris yang kaya (Skaf & Boyd, 2019).

b. Fungsi Lagrange Dan Masalah Dual

Fungsi Lagrange $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai:

$$L(x, \lambda, v) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p v_j h_j(x)$$

di mana $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m_+$ adalah vektor pengali Lagrange untuk kendala ketaksamaan (dengan $\mathbb{R}^m_+ = \{\lambda \in \mathbb{R}^m : \lambda_i \geq 0 \text{ untuk semua } i\}$), dan $v = (v_1, \dots, v_p) \in \mathbb{R}^p$ adalah vektor pengali untuk kendala kesamaan (Bertsekas, 2022). Fungsi Lagrange mengkodekan informasi masalah primal dengan menggabungkan fungsi objektif dan kendala melalui pengali yang merepresentasikan 'harga bayangan' dari setiap kendala.

Fungsi dual Lagrange $g: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ didefinisikan sebagai infimum fungsi Lagrange terhadap variabel primal:

$$g(\lambda, v) = \inf\{L(x, \lambda, v) : x \in X\}$$

Fungsi g selalu konkaf, bahkan ketika masalah primal tidak konveks, yang merupakan sifat fundamental dalam teori dualitas (Rockafellar & Wets, 2021). Konkavitas ini mengikuti dari fakta bahwa g adalah infimum dari fungsi-fungsi affine dalam (λ, v) , suatu hasil langsung dari teori fungsi konkaf.

Masalah dual Lagrange (D) kemudian dirumuskan sebagai:

$$\begin{aligned} & \text{maximize } g(\lambda, v) \\ & \text{subject to } \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

dengan nilai optimal $d^* = \sup\{g(\lambda, v) : \lambda \geq 0\}$. Relasi antara p^* dan d^* menjadi inti dari teori dualitas dan akan dibahas secara mendalam pada bagian selanjutnya.

c. Interpretasi Geometris Fungsi Lagrange

Dari sudut pandang geometris, fungsi Lagrange dapat dipandang sebagai keluarga hiperplane dalam ruang (x, f) yang diparametrisasi oleh (λ, v) . Untuk setiap pasangan (λ, v) tetap, fungsi $L(\cdot; \lambda, v)$ mendefinisikan permukaan dalam \mathbb{R}^{n+1} , dan nilai $g(\lambda, v)$ merepresentasikan 'ketinggian' minimum dari permukaan ini di atas himpunan X (Peypouquet, 2020).

Dalam konteks optimasi konveks, interpretasi geometris menjadi lebih transparan. Epigraf dari fungsi dual, $\text{epi}(g) = \{(\lambda, v, t) : t \geq g(\lambda, v)\}$, membentuk himpunan konveks dalam \mathbb{R}^{m+p+1} . Lebih lanjut, untuk masalah primal konveks, hipograf dari fungsi dual, $\text{hypo}(g) = \{(\lambda, v, t) : t \leq g(\lambda, v)\}$, memberikan karakterisasi geometris dari himpunan batas bawah yang dapat dicapai untuk nilai optimal primal (Heinz H. Bauschke, 2020).

3.2. Kondisi Optimalitas Karush-khun-tucker

a. Derivasi Dan Formulasi Kondisi KKT

Kondisi Karush-Kuhn-Tucker (KKT) merupakan generalisasi dari metode pengali Lagrange klasik untuk masalah dengan kendala ketaksamaan. Misalkan x^* adalah solusi lokal dari masalah primal, dan andaikan fungsi-fungsi f , g_i , dan h_j diferensiabel di x^* . Jika suatu constraint qualification terpenuhi (seperti Linear Independence Constraint Qualification atau Slater's condition), maka terdapat pengali $\lambda^* \in \mathbb{R}_+^m$ dan $v^* \in \mathbb{R}^p$ sedemikian sehingga kondisi-kondisi berikut dipenuhi (Bertsekas, 2022):

(KKT1) Stationarity:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^p v_j^* \nabla h_j(x^*) = 0$$

(KKT2) Primal feasibility:

$$g_i(x^*) \leq 0, i = 1, \dots, m$$

$$h_j(x^*) = 0, j = 1, \dots, p$$

(KKT3) Dual feasibility:

$$\lambda_i^* \geq 0, i = 1, \dots, m$$

(KKT4) Complementary slackness:

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, i = 1, \dots, m$$

Kondisi stationarity (KKT1) menyatakan bahwa gradien fungsi objektif di titik optimal dapat diekspresikan sebagai kombinasi linear dari gradien kendala aktif. Kondisi ini memiliki interpretasi geometris yang mendalam: vektor $\nabla f(x^*)$ harus terletak dalam cone yang dibangun oleh gradien kendala aktif (Skaf & Boyd, 2019).

b. Interpretasi Geometris Kondisi KKT

Dari perspektif geometris, kondisi KKT dapat dipahami melalui konsep kerucut normal dan kerucut tangen. Misalkan $A(x^*) = \{i : g_i(x^*) = 0\}$ adalah himpunan indeks kendala aktif di x^* . Kerucut tangen linearisasi dari himpunan feasible F di x^* didefinisikan sebagai:

$$T(x^*) = \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla g_i(x^*)^T d \leq 0 \text{ untuk } i \in A(x^*), \nabla h_j(x^*)^T d = 0 \text{ untuk } j = 1, \dots, p\}$$

Kerucut normal $N(x^*)$ terhadap F di x^* adalah dual polar dari $T(x^*)$:

$$N(x^*) = \{w \in \mathbb{R}^n : w^T d \leq 0 \text{ untuk semua } d \in T(x^*)\}$$

Kondisi stationarity KKT ekuivalen dengan persyaratan bahwa $-\nabla f(x^*) \in N(x^*)$, yang secara geometris berarti bahwa arah descent terjal dari fungsi objektif tidak dapat terletak dalam kerucut tangen (R. Tyrrell Rockafellar, et.al.). Dengan kata lain, tidak ada arah feasible yang dapat menurunkan nilai fungsi objektif secara lokal.

Complementary slackness (KKT4) memiliki interpretasi bahwa pengali Lagrange λ_i^* hanya dapat positif untuk kendala yang aktif (binding) di solusi optimal. Kendala yang tidak aktif memiliki 'harga bayangan' nol, yang konsisten dengan intuisi ekonomi bahwa relaksasi kendala yang tidak binding tidak akan mengubah nilai optimal (Peypouquet, 2020).

c. Constraint qualifications

Validitas kondisi KKT bergantung pada constraint qualifications yang menjamin keteraturan geometris dari himpunan feasible. Beberapa constraint qualifications yang umum digunakan meliputi:

1. Linear Independence Constraint Qualification (LICQ): Gradien dari semua kendala aktif $\nabla g_i(x^*)$ untuk $i \in A(x^*)$ dan $\nabla h_j(x^*)$ untuk $j = 1, \dots, p$ adalah linearly independent.

Kondisi ini merupakan yang paling kuat dan menjamin uniqueness dari pengali Lagrange.

2. Mangasarian-Fromovitz Constraint Qualification (MFCQ): Gradien kendala kesamaan $\nabla h_j(x^*)$ adalah linearly independent, dan terdapat vektor d sedemikian sehingga $\nabla g_i(x^*)^T d < 0$ untuk $i \in A(x^*)$ dan $\nabla h_j(x^*)^T d = 0$ untuk $j = 1, \dots, p$.
3. Slater's Condition (untuk masalah konveks): Terdapat $x_0 \in \text{relint}(X)$ sedemikian sehingga $g_i(x_0) < 0$ untuk semua i dan $h_j(x_0) = 0$ untuk semua j , dengan h_j affine. Kondisi ini menjamin strong duality dalam setting konveks (Heinz H. Bauschke, 2020).

Secara geometris, constraint qualifications dapat dipandang sebagai kondisi yang mencegah degenerasi dari struktur geometris himpunan feasible. MFCQ, misalnya, menjamin bahwa kerucut tangen memiliki interior non-empty, yang penting untuk analisis sensitivitas solusi optimal (Attouch et al., 2015).

3.3. Teorema Dualitas Kuat Dan Lemah

a. Dualitas Lemah Dan Gap Dualitas

Teorema dualitas lemah (weak duality) merupakan hasil fundamental yang berlaku untuk semua masalah optimasi, tanpa memerlukan asumsi konveksitas. Teorema ini menyatakan bahwa untuk setiap x feasible terhadap masalah primal dan setiap (λ, v) dengan $\lambda \geq 0$, berlaku:

$$g(\lambda, v) \leq f(x)$$

Khususnya, $d^* \leq p^*$, yang berarti nilai optimal dual memberikan batas bawah untuk nilai optimal primal (Rockafellar & Wets, 2021). Bukti dari hasil ini langsung mengikuti dari definisi fungsi dual:

$$g(\lambda, v) = \inf\{L(x, \lambda, v) : x \in X\} \leq L(x, \lambda, v) = f(x) + \sum \lambda_i g_i(x) + \sum v_j h_j(x) \leq f(x)$$

untuk setiap x feasible, karena $\lambda_i g_i(x) \leq 0$ dan $h_j(x) = 0$.

Gap dualitas (*duality gap*) didefinisikan sebagai selisih $p^* - d^*$. Gap ini mengukur seberapa jauh solusi dual dari memberikan batas yang ketat untuk nilai optimal primal. Dalam konteks algoritma optimasi, gap dualitas sering digunakan sebagai kriteria stopping, karena memberikan bound untuk jarak antara solusi kandidat dengan solusi optimal sebenarnya (Skaf & Boyd, 2019).

b. Optimasi Kuat Dalam Optimasi Konveks

Teorema dualitas kuat (*strong duality*) menyatakan bahwa $p^* = d^*$ di bawah kondisi tertentu. Untuk masalah konveks di mana f dan g_i adalah konveks, h_j adalah affine, dan Slater's condition terpenuhi, dualitas kuat berlaku (Bertsekas, 2022). Lebih formal:

Teorema (Dualitas Kuat). Misalkan masalah primal adalah konveks dan Slater's condition terpenuhi. Maka $p^* = d^* < \infty$, dan nilai optimal dual dicapai pada suatu (λ^*, v^*) .

Bukti teorema ini bergantung pada teorema pemisahan hiperplane untuk himpunan konveks. Secara geometris, dualitas kuat dapat dipahami melalui konsep epigraf optimal. Definisikan epigraf optimal sebagai:

$$G = \{(u, v, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} : \exists x \in X \text{ dengan } g_i(x) \leq u_i, h_j(x) = v_j, f(x) \leq t\}$$

Himpunan G adalah konveks ketika masalah primal konveks. Slater's condition menjamin bahwa titik $(0, 0, p^*)$ terletak pada boundary dari G , dan teorema pemisahan menjamin eksistensi hiperplane supporting dengan normal $(\lambda^*, v^*, -1)$ yang mendefinisikan solusi dual optimal (R. Tyrrell Rockafellar, et.al.).

c. Teori Saddle Point Dan Dualitas

Teori saddle point memberikan karakterisasi alternatif untuk dualitas kuat. Pasangan (x^*, λ^*, v^*) disebut saddle point dari fungsi Lagrange jika:

$$L(x^*, \lambda, v) \leq L(x^*, \lambda^*, v^*) \leq L(x, \lambda^*, v^*)$$

untuk semua $x \in X$ dan (λ, v) dengan $\lambda \geq 0$. Secara geometris, x^* meminimalkan L terhadap x untuk (λ^*, v^*) tetap, sementara (λ^*, v^*) memaksimalkan L terhadap (λ, v) untuk x^* tetap (Peypouquet, 2020).

Teorema (Karakterisasi Saddle Point). Jika (x^*, λ^*, v^*) adalah saddle point dari L , maka x^* menyelesaikan masalah primal, (λ^*, v^*) menyelesaikan masalah dual, dan dualitas kuat berlaku: $f(x^*) = g(\lambda^*, v^*)$. Sebaliknya, jika dualitas kuat berlaku dan $x^*, (\lambda^*, v^*)$ adalah optimal untuk masalah primal dan dual masing-masing, maka (x^*, λ^*, v^*) adalah saddle point.

Bukti mengikuti dari inequality saddle point. Jika (x^*, λ^*, v^*) adalah saddle point, maka:

$$g(\lambda^*, v^*) = \inf_x L(x, \lambda^*, v^*) = L(x^*, \lambda^*, v^*) = f(x^*) + \sum \lambda_i^* g_i(x^*) + \sum v_j^* h_j(x^*)$$

Dari primal feasibility dan complementary slackness, term terakhir bernilai nol, sehingga $g(\lambda^*, v^*) = f(x^*)$, yang menunjukkan dualitas kuat (Heinz H. Bauschke, 2020).

Interpretasi geometris dari saddle point sangat kaya. Dalam ruang produk $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$, saddle point merepresentasikan titik yang secara simultan merupakan minimum dalam variabel primal dan maksimum dalam variabel dual. Permukaan level dari L membentuk struktur 'saddle' (pelana) di sekitar titik ini, yang memberikan nama untuk konsep tersebut (Attouch et al., 2015).

3.4 Perspektif Analisis Geometris Dan Fungsional

a. Dualitas Dalam Ruang Bannach

Teori dualitas dapat digeneralisasi ke ruang Banach tak berhingga dimensi, yang memberikan framework untuk optimasi dalam ruang fungsi. Misalkan X adalah ruang Banach dengan dual X^* (ruang dari semua fungsional linear kontinu pada X). Untuk masalah optimasi:

$$\text{minimize } f(x)$$

$$\text{subject to } Ax = b, x \in C$$

di mana $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ adalah fungsi konveks proper lower semicontinuous, $A: X \rightarrow Y$ adalah operator linear kontinu dengan Y ruang Banach, $b \in Y$, dan $C \subseteq X$ konveks tertutup, fungsi Lagrange didefinisikan sebagai:

$$L(x, y^*) = f(x) + \langle y^*, Ax - b \rangle$$

dengan $y^* \in Y^*$ (Rockafellar & Wets, 2021). Fungsi dual menjadi:

$$g(y^*) = \inf\{L(x, y^*) : x \in C\} = -\langle y^*, b \rangle - \sup\{\langle y^*, Ax \rangle - f(x) : x \in C\}$$

Teorema Fenchel-Rockafellar memberikan kondisi untuk dualitas kuat dalam setting ini. Jika $0 \in \text{int}(\text{dom}(f) - AC)$, maka $p^* = d^*$ dan dual attained (jika dual feasible). Kondisi interior ini merupakan versi tak berhingga dimensi dari Slater's condition (Heinz H. Bauschke, 2020).

b. Transformasi Fenchel Dan Konjungasi

Transformasi Fenchel (*conjugate convex*) memainkan peran sentral dalam teori dualitas modern. Untuk fungsi $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, konjugat Fenchel $f^*: X^* \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ didefinisikan sebagai:

$$f^*(x^*) = \sup\{\langle x^*, x \rangle - f(x) : x \in X\}$$

Transformasi ini adalah involutive untuk fungsi konveks proper lower semicontinuous: $f^{**} = f$ (Theorem Fenchel-Moreau). Geometrically, $f^*(x^*)$ merepresentasikan intercept dari supporting hyperplane dengan normal x^* terhadap epigraf dari f (Peypouquet, 2020).

Dalam konteks dualitas Lagrange, fungsi dual dapat diekspresikan menggunakan konjugat Fenchel. Untuk masalah:

$$\text{minimize } f(x) + h(Ax)$$

dengan f, h konveks dan A linear, dual problem menjadi:

$$\text{maximize } -f^*(-A^*y^*) - h^*(y^*)$$

di mana A^* adalah adjoint dari A . Formulasi ini mengungkapkan struktur simetris antara primal dan dual melalui konjugasi (Attouch et al., 2015).

c. Konveksitas, Subdifferensial, Dan Geometri

Subdifferensial adalah generalisasi konsep gradien untuk fungsi non-smooth. Untuk fungsi konveks $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, subdifferensial di x adalah himpunan:

$$\partial f(x) = \{v \in \mathbb{R}^n : f(y) \geq f(x) + v^T(y - x) \text{ untuk semua } y\}$$

Geometrically, $\partial f(x)$ adalah himpunan semua slope dari supporting hyperplane terhadap epigraf f di titik $(x, f(x))$. Untuk fungsi diferensiabel, $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$. Untuk fungsi non-smooth seperti fungsi norm atau indicator function, subdifferensial dapat berupa himpunan multi-valued (R. Tyrrell Rockafellar, et.al.).

Kondisi optimalitas untuk masalah unconstrained minimize $f(x)$ dengan f konveks adalah:

$$0 \in \partial f(x^*)$$

Untuk masalah berkendala dengan kendala C konveks, kondisi optimalitas menjadi:

$$0 \in \partial f(x^*) + N_C(x^*)$$

di mana $N_C(x^*)$ adalah normal cone terhadap C di x^* . Relasi ini menghubungkan teori subdifferensial dengan analisis konveks dan teori dualitas (Skaf & Boyd, 2009).

Dari perspektif geometris, subdifferensial $\partial f(x)$ dapat dipandang sebagai generalized gradient yang mengkodekan informasi lokal tentang tingkah laku fungsi. Untuk fungsi yang highly non-smooth (seperti max functions atau norms), subdifferensial memberikan karakterisasi yang lebih halus daripada directional derivatives (Heinz H. Bauschke, 2020).

d. Refleksivitas Dan Dualitas

Dalam analisis fungsional, ruang Banach X disebut refleksif jika canonical embedding $J: X \rightarrow X^{**}$ (bidual) adalah surjektif, dengan $X^{**} = (X^*)^*$. Refleksivitas memiliki implikasi penting untuk teori dualitas. Untuk ruang refleksif, banyak teorema dualitas memiliki formulasi yang lebih sederhana karena $X = X^{**}$ secara canonical (Peypouquet, 2020).

Sebagai contoh, dalam ruang Hilbert (yang selalu refleksif), Riesz representation theorem menyatakan bahwa X^* dapat diidentifikasi dengan X itu sendiri melalui inner product. Ini menyederhanakan banyak konstruksi dalam teori dualitas dan membuat interpretasi geometris lebih transparan (Attouch et al., 2015).

4. SIMPULAN

Penelitian ini telah menyajikan tinjauan naratif komprehensif terhadap teori dualitas Lagrange dengan penekanan pada perspektif analisis geometris modern. Pembahasan

mencakup formulasi matematis masalah primal-dual dan fungsi Lagrange, kondisi optimalitas Karush-Kuhn-Tucker (KKT) beserta interpretasi geometrisnya melalui kerucut normal dan tangen, teorema dualitas lemah dan kuat beserta implikasinya, serta analisis struktur geometris ruang primal-dual dalam kerangka analisis fungsional. Hasil tinjauan menunjukkan bahwa perspektif geometris memberikan pemahaman yang lebih mendalam tentang sifat-sifat solusi optimal dan mempertegas posisi teori dualitas Lagrange sebagai bagian integral dari analisis konveks modern.

Beberapa arah penelitian lanjutan yang diidentifikasi meliputi: (1) perluasan teori ke setting optimasi stokastik dan robust; (2) investigasi struktur gap dualitas pada masalah non-konveks; dan (3) pendalaman aplikasi dalam pembelajaran mesin serta pengembangan metode numerik berbasis struktur geometris. Penelitian pada arah-arrah tersebut diharapkan dapat memperluas cakupan teoritis sekaligus meningkatkan aplikabilitas teori dualitas Lagrange dalam berbagai domain matematika terapan.

5. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada dosen pembimbing dan rekan-rekan di Program Studi Matematika FMIPA UNSRI atas diskusi yang bermanfaat terkait topik ini. Penulis juga berterima kasih kepada reviewer anonim yang telah memberikan masukan konstruktif untuk meningkatkan kualitas artikel ini.

6. REKOMENDASI

Rekomendasi dalam penelitian ini diarahkan pada pengembangan kajian teori dualitas Lagrange secara lebih luas dan mendalam. Penelitian selanjutnya disarankan untuk mengeksplorasi dualitas Lagrange pada permasalahan optimasi non-konveks dan optimasi stokastik, mengingat banyak permasalahan nyata tidak sepenuhnya memenuhi asumsi konveksitas. Selain itu, pengembangan analisis dualitas pada ruang berdimensi tak hingga dan ruang fungsi merupakan topik yang relevan dan potensial untuk diteliti lebih lanjut.

Penelitian lanjutan juga direkomendasikan untuk mengintegrasikan kajian teoretis dengan studi numerik atau simulasi komputasi, sehingga interpretasi geometris dari dualitas Lagrange dapat divisualisasikan secara lebih konkret. Pendekatan ini diharapkan mampu meningkatkan pemahaman konseptual serta memperluas penerapan teori dualitas Lagrange dalam bidang optimasi terapan, termasuk pembelajaran mesin dan ilmu data.

Adapun hambatan yang berpotensi memengaruhi penelitian selanjutnya meliputi keterbatasan literatur terkini yang secara spesifik membahas interpretasi geometris dualitas pada kasus non-konveks, serta tingginya kompleksitas matematis dalam pembuktian teorema-teorema lanjutan. Oleh karena itu, diperlukan ketelitian dalam

pemilihan pendekatan teoretis dan kehati-hatian dalam penyajian analisis agar hasil penelitian tetap sistematis, koheren, dan mudah dipahami.

7. REFERENSI

- Attouch, H., Buttazzo, G., & Michaille, G. (2015). *Variational analysis in Sobolev and BV spaces: Applications to PDEs and optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Bauschke, H. H., & Combettes, P. L. (2020). *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces* (2nd ed.). Springer.
- Bergmann, R., & Herzog, R. (2019). Intrinsic formulation of KKT conditions and constraint qualifications on smooth manifolds. *SIAM Journal on Optimization*, 29(4), 2423–2444. <https://doi.org/10.1137/18M1181602>
- Bergmann, R., Herzog, R., Silva Louzeiro, M., Tenbrinck, D., & Vidal-Núñez, J. (2021). Fenchel duality theory and a primal-dual algorithm on Riemannian manifolds. *Foundations of Computational Mathematics*, 21(6), 1465–1504. <https://doi.org/10.1007/s10208-020-09486-5>
- Bertsekas, D. P. (2022). *Convex optimization algorithms*. Athena Scientific.
- Bonnans, J. F., & Shapiro, A. (2019). *Perturbation analysis of optimization problems*. Springer.
- Kanzow, C., Steck, D., & Wachsmuth, D. (2018). An augmented Lagrangian method for optimization problems in Banach spaces. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 56(1), 272–291. <https://doi.org/10.1137/16M1107103>
- Mordukhovich, B. S. (2018). *Variational analysis and applications*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-92775-6>
- Mordukhovich, B. S. (2024). *Second-order variational analysis in optimization, variational stability, and control: Theory, algorithms, applications*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-53476-8>
- Peypouquet, J. (2020). *Convex optimization in normed spaces: Theory, methods and examples*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-13710-0>
- Rockafellar, R. T., & Wets, R. J.-B. (2009). *Variational analysis* (3rd ed., Vol. 317). Springer.
- Santambrogio, F. (2023). *Optimal transport for applied mathematicians: Calculus of variations, PDEs, and modeling*. Birkhäuser.
- Silva Louzeiro, M., Bergmann, R., & Herzog, R. (2023). Fenchel conjugate via Busemann function on Hadamard manifolds. *Applied Mathematics & Optimization*, 88(2), Article 47. <https://doi.org/10.1007/s00245-023-10060-y>
- Skaf, J., & Boyd, S. (2019). Multi-period portfolio optimization with constraints and transaction costs. *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.1415583>
- Villani, C. (2021). *Topics in optimal transportation* (2nd ed.). American Mathematical Society.