

Analisis Dinamik Model Matematika Belanja *Online* Orde Fraksional

Zulaikha^{1*}, Meri Teri Andani², Rio Satriyantara³

¹ Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi (FST), Universitas Islam Negeri Walisongo, Semarang, Indonesia

³ Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Mataram, Mataram, Indonesia

zulaikha@walisongo.ac.id

Diterima:31-07-2026; Direvisi:30-09-2026; Dipublikasi: 30-09-2026

Abstract

The growth of *online* shopping is strongly influenced by information dissemination within society; however, its dynamic behavior has not been fully explored using mathematical approaches. This study aims to analyze the dynamics of *online* shopping by developing a fractional-order mathematical model that describes the interaction between non-*online* buyers, *online* buyers, and information density. The research method employs a literature study and mathematical modeling approach, followed by equilibrium stability analysis and numerical simulations for various fractional orders and information-related parameters. The results indicate the existence of two stable conditions, namely the *online* shopping-free equilibrium and the endemic *online* shopping equilibrium. The fractional order significantly affects the speed at which the system reaches equilibrium, while the balance between information generation and decay rates determines the long-term sustainability of *online* shopping. These findings highlight the crucial role of information in shaping and maintaining *online* shopping behavior in society.

Keywords: *online* shopping; fractional model; information spreading; dynamical system

Abstrak

Perkembangan belanja *online* sangat dipengaruhi oleh penyebaran informasi di masyarakat, namun dinamika perilaku konsumen tersebut belum sepenuhnya dipahami melalui pendekatan matematis. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis dinamika belanja *online* dengan mengembangkan model matematika berorde fraksional yang menggambarkan interaksi antara pembeli non-*online*, pembeli *online*, dan kepadatan informasi. Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur dan pemodelan matematika, dilanjutkan dengan analisis kestabilan titik kesetimbangan serta simulasi numerik untuk beberapa nilai orde fraksional dan parameter penyebaran informasi. Hasil penelitian menunjukkan adanya dua kondisi kestabilan, yaitu keadaan bebas belanja *online* dan keadaan endemik belanja *online*. Nilai orde fraksional berpengaruh terhadap kecepatan sistem mencapai titik kesetimbangan, sedangkan keseimbangan antara laju penambahan dan penipisan informasi menentukan keberlangsungan belanja *online* dalam jangka panjang. Hasil ini menegaskan bahwa informasi memiliki peran penting dalam membentuk dan mempertahankan perilaku belanja *online* di masyarakat.

Kata Kunci: belanja *online*; model fraksional; penyebaran informasi; sistem dinamik

1. PENDAHULUAN

Berbelanja adalah bagian yang penting dalam kehidupan sehari-hari. Dalam berbelanja, tersedia berbagai macam komoditas, mulai dari kebutuhan pokok hingga kebutuhan tersier. Bagi sebagian orang, berbelanja adalah sebuah kegiatan yang melibatkan

kesenangan dan hiburan, sementara beberapa orang menganggapnya membosankan dan menghabiskan waktu. Secara umum, perilaku berbelanja terbagi menjadi dua kategori, yaitu belanja *offline* dan belanja *online*. Perkembangan teknologi informasi telah mendorong terjadinya perubahan pada preferensi konsumen dalam memilih cara berbelanja.

Belanja *online* semakin diminati karena dianggap lebih praktis, cepat, dan efisien dibandingkan belanja konvensional ((Huseynov & Yıldırım, 2016) dan (Ramanjaneyulu et al., 2016)). Kemudahan akses, fleksibilitas waktu, kemudahan pembayaran, serta kemampuan untuk membandingkan harga barang menjadi faktor utama yang meningkatkan ketertarikan konsumen terhadap belanja *online* ((Kim & Lennon, 2008) dan (Aldhmour & Sarayrah, 2016)). Selain itu, desain dan fitur website yang menarik juga turut memengaruhi minat beli konsumen. Oleh karena itu, belanja *online* menjadi pilihan favorit dibandingkan dengan belanja langsung (konvensional).

Di sisi lain, belanja *offline* tetap memiliki keunggulan berupa interaksi sosial dan pengalaman langsung dalam memilih produk. Namun, keterbatasan jam operasional, jarak tempuh, kemacetan, serta minimnya variasi produk menjadi hambatan yang sering ditemui dalam belanja *offline*. Konsumen yang tidak bergantung pada belanja *online* juga mengalami keterbatasan dalam melakukan perbandingan harga tanpa mengunjungi toko secara langsung (Tiwari, 2025).

Pesatnya perkembangan teknologi informasi telah mempercepat globalisasi dan membuka akses masyarakat terhadap berbagai produk dari seluruh dunia. Berdasarkan data SUSENAS 2017, persentase masyarakat Indonesia yang melakukan belanja *online* mencapai 7,59%, yang sebagian besar terkonsentrasi di wilayah Jabodetabek. Peningkatan akses internet dan ketersediaan platform *e-commerce* menjadi faktor yang memperluas jangkauan belanja *online*, terutama bagi masyarakat di kota kecil yang memiliki keterbatasan pilihan produk.

Seiring berkembangnya fenomena belanja *online*, pendekatan matematis mulai banyak digunakan untuk memahami perilaku konsumen dan dinamika penyebaran tren digital. Model matematika berperan penting dalam menggambarkan permasalahan nyata melalui sistem persamaan diferensial (Ndii, 2022). Fenomena belanja *online* memiliki karakteristik serupa dengan penyebaran penyakit menular, sehingga dapat dimodelkan menggunakan pendekatan epidemiologi. Namun, dinamika tersebut cenderung kompleks sehingga sulit diselesaikan secara analitik. Oleh karena itu, analisis kestabilan titik ekuilibrium menjadi metode yang relevan untuk mengamati perilaku sistem secara kualitatif (SINAGA et al., n.d.).

Berbagai penelitian sebelumnya telah menerapkan model epidemi seperti SIR dalam bidang pemasaran, misalnya untuk menganalisis strategi pemasaran viral (Rodrigues & Fonseca, 2016), efektivitas pemasaran word-of-mouth (Li et al., 2018), serta motivasi

konsumen dalam pemasaran digital (Bhattacharya et al., 2019). Penelitian lain mengintegrasikan konsep bifurkasi dan hysteresis untuk memahami respons konsumen dalam kampanye pemasaran *online* (Lacitignola, 2021). Selain itu, penelitian terkait model epidemi dalam bidang sosial yaitu (Andani & Zulaikha, 2025; Fauziyah, 2026; Putri & Zulaikha, 2025).

Pada tahun 2016, Angstmann, dkk (Angstmann et al., 2016) melakukan modifikasi model matematika SIR yang berbentuk SPDB (Sistem Persamaan Diferensial Biasa) nonlinear menjadi bentuk SPDF (Sistem Persamaan Diferensial Fraksional). Secara alamiah, SPDF terkait dengan faktor histori penyebaran penyakit dalam suatu sistem biologis. Dengan menerapkan analisis kestabilan pada SPDF, ditemukan syarat kestabilan dari titik kesetimbangan endemik dari model matematika tersebut. Sharma (Sharma, 2021) melakukan penelitian model matematika belanja *online* yang SPDB (Sistem Persamaan Diferensial Biasa), sedangkan SPDF mempunyai kelebihan terkait faktor histori (sejarah). Berdasarkan penelitian-penelitian terdahulu yang sudah dilakukan, maka dalam penelitian ini akan dilakukan pengembangan model yang telah dikaji oleh Sharma pada tahun 2021 dengan memodifikasi model matematika belanja *online* yang berbentuk SPDB menjadi bentuk SPDF, yang mana model tersebut lebih realistis karena menggambarkan permasalahan dalam dunia nyata.

2. METODE PELAKSANAAN

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur. Metode ini dilakukan dengan mengkaji berbagai sumber terkait, seperti penelitian terdahulu, buku, artikel ilmiah, jurnal, dan media lain yang relevan dengan topik model matematika belanja *online*.

2.1. Prosedur Penelitian

Prosedur penelitian dilakukan melalui beberapa tahapan sebagai berikut.

2.1.1 Studi Literatur

Tahap awal dilakukan dengan mengidentifikasi dan mengkaji permasalahan melalui berbagai referensi yang relevan, terutama yang berkaitan dengan model matematika fenomena belanja *online*. Sumber literatur meliputi buku, artikel ilmiah, jurnal terkait model epidemiologi, dan penelitian terdahulu yang membahas dinamika sistem persamaan diferensial.

2.1.2 Membangun Model Matematika

Setelah memperoleh landasan teoretis yang memadai, peneliti menyusun asumsi-asumsi dasar, menentukan variabel serta parameter yang diperlukan, kemudian menyusun model matematika belanja online yang akan dianalisis.

2.1.3 Analisis Kestabilan Lokal Model

Analisis kestabilan dilakukan melalui beberapa tahap, yaitu:

1. Menentukan titik ekuilibrium model yang terdiri dari titik ekuilibrium bebas belanja online dan titik ekuilibrium endemik belanja online, yang diperoleh dengan mensubstitusikan ruas kanan sistem persamaan ke nol.
2. Menghitung bilangan reproduksi dasar R_0 melalui metode *next generation matrix*.
3. Melakukan analisis kestabilan lokal di sekitar titik ekuilibrium berdasarkan nilai parameter dan karakteristik sistem.

2.1.4 Simulasi Numerik

Pada tahap ini, nilai parameter ditetapkan berdasarkan data, asumsi, serta referensi dari artikel yang relevan. Simulasi numerik dilakukan menggunakan perangkat lunak MATLAB R2013a dengan dua skenario utama, yaitu ketika R_0 (keadaan bebas belanja online) dan ketika R_0 (keadaan endemik belanja online).

2.1.5 Interpretasi Hasil Simulasi

Hasil simulasi dianalisis untuk menggambarkan dinamika model serta mengevaluasi perilaku sistem sesuai tujuan penelitian. Interpretasi dilakukan untuk memberikan pemahaman mengenai implikasi model serta kondisi kestabilan dari setiap skenario yang dihasilkan.

2.2. Desain Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian teoretis berbasis analisis model matematika. Data yang digunakan berasal dari studi literatur dan hasil penelitian relevan yang mendukung penetapan nilai parameter dalam model. Pengumpulan data dilakukan melalui penelusuran sumber ilmiah yang membahas fenomena belanja *online*, model epidemiologi, serta pendekatan persamaan diferensial. Model yang dibangun dianalisis secara matematis menggunakan metode linearisasi, analisis kestabilan titik ekuilibrium, dan perhitungan bilangan reproduksi dasar. Selain itu, simulasi numerik digunakan untuk menggambarkan dinamika sistem secara komputasional dan memvalidasi perilaku model.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Kontruksi Model Matematika Belanja *Online*

Fenomena penyebaran informasi mengenai belanja online memiliki kemiripan dengan penyebaran epidemi, sehingga pendekatan model epidemi digunakan dalam konstruksi

model ini. Beberapa beberapa poin dalam mengkontruksi model ini adalah sebagai berikut.

1. Dalam pemodelan epidemi, penggunaan transmisi bilinear sangat banyak digunakan. Oleh karena itu, laju transmisi bilinear juga dipertimbangkan dalam kontruksi model ini.
2. Pada model kompartemen klasik (misalnya, SIR, SIS, SEIR), laju rekrutmen konstan adalah salah satu konsep dasar yang banyak digunakan. Oleh karena itu, diasumsikan adanya laju rekrutmen bernilai konstan.
3. Dalam kompartemen model epidemi, perpindahan populasi dari satu kompartemen ke kompartemen lain umumnya terjadi pada laju yang sebanding dengan populasi yang ada di kompartemen tertentu.

Perumusan model berdasarkan konsep-konsep epidemiologi yang telah dijelaskan sebelumnya. Pada penelitian ini, populasi pembeli dibagi ke dalam dua kelas, yaitu pembeli *non-online* $N(t)$ dan pembeli *non-online* $S(t)$. Selain itu, $P(t)$ merujuk pada kepadatan kumulatif informasi yang dihasilkan oleh individu dari kelas $S(t)$. Laju pertumbuhan informasi diasumsikan berbanding lurus dengan jumlah individu di kelas $S(t)$. Seluruh pendatang baru ke dalam sistem secara langsung masuk ke kelas $N(t)$ dengan laju konstan sebesar A .

Selanjutnya, diasumsikan bahwa individu dari kelas pembeli *non-online* $N(t)$ akan berpindah ke kelas $S(t)$ setelah memperoleh informasi mengenai manfaat belanja online. Disini, β menunjukkan laju penyebaran informasi tentang keuntungan belanja *online* di antara individu dari kelas pembeli *non-online*, yang mendorong peralihan ke kelas pembeli *online*. Sebagian individu dari kelas $S(t)$ meninggalkan kelas pembeli *online* dengan laju δ dan bergabung kembali dengan kelas $N(t)$ dengan beberapa alasan, seperti kurangnya pemahaman tentang teknologi, kualitas produk, dan sebagainya. Model ini juga mengasumsikan bahwa karena ketidakaktifan dan kematian, individu keluar dari sistem dinamika belanja online dari masing-masing kelas dengan laju dN dan dS . Sistem dinamika belanja online dimodelkan pada sistem (1).

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = A - \beta NP - dN + \delta S, \\ \frac{dS}{dt} = \beta NP - dS - \delta S, \\ \frac{dP}{dt} = \theta S - \gamma P. \end{cases} \quad (1)$$

Pada sistem (1), parameter θ mempresentasikan sebagai laju penambahan informasi, sedangkan γ menunjukkan laju pengurangan informasi yang disebabkan oleh ketidakberdayaan, masalah sosial dalam populasi, dan faktor serupa lainnya. Daerah

atraksi untuk melakukan analisis dinamik terhadap sistem (1) ditentukan oleh himpunan sebagai berikut.

$$\Omega = \left\{ (N, S, P) : 0 \leq N, S \leq \frac{A}{d}, 0 \leq P \leq \frac{\theta A}{\gamma d} = P_M \right\}. \quad (2)$$

Model yang dikonstruksi merupakan pengembangan model Sharma (2021). Kontruksi model dilakukan dengan mengubah sistem (1) yang berorde integer (orde satu) menjadi orde fraksional yaitu dengan mempertimbangan efek memori yang selanjutnya model orde fraksional dalam bentuk turunan Caputo dengan $0 < \alpha < 1$ yang ditulis sebagai berikut.

$$\begin{cases} {}_{t_0}^c D_t^\alpha N(t) = A - \beta NP - dN + \delta S, \\ {}_{t_0}^c D_t^\alpha S(t) = \beta NP - dS - \delta S, \\ {}_{t_0}^c D_t^\alpha P(t) = \theta S - \gamma P, \end{cases} \quad (3)$$

dengan nilai awal yaitu $N(0) = N_0$, $S(0) = S_0$, dan $P(0) = P_0$.

3.2. Analisis Kestabilan Model Matematika Belanja *Online*

Dalam melakukan analisis model dinamika belanja online akan ditentukan titik kesetimbangan, kestabilan titik kesetimbangan, dan simulasi pada analisis model matematika tersebut.

3.2.1 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan dari sistem (3) diperoleh pada saat ${}_{t_0}^c D_t^\alpha N(t) = {}_{t_0}^c D_t^\alpha S(t) = {}_{t_0}^c D_t^\alpha P(t) = 0$, sehingga titik kesetimbangan bebas belanja online (E_0) dan titik kesetimbangan endemik belanja online (E_1) adalah sebagai berikut.

$$E_0(N^*, S^*, P^*) = \left(\frac{A}{d}, 0, 0 \right), \quad (4)$$

$$E_1(N^*, S^*, P^*) = \left(\frac{\gamma(d + \delta)}{\beta\theta}, \frac{\beta\theta A - \gamma d(d + \delta)}{d\beta\theta}, \frac{\theta S}{\gamma} \right). \quad (5)$$

3.2.2 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan Reproduksi Dasar (R_0) yaitu alat untuk mengukur sejauh mana informasi positif terkait belanja *online* dapat mendorong perpindahan konsumen dari pembeli non-

online ke pembeli *online*. Metode *Next Generation Matrix* akan digunakan untuk menghitung R_0 .

Persamaan yang digunakan adalah ${}_t^c D_t^\alpha S(t)$ dan ${}_t^c D_t^\alpha P(t)$ karena $S(t)$ dan $P(t)$ adalah komponen aktif yang menyebabkan perpindahan atau penyebaran informasi sehingga menyebabkan perpindahan dari N ke S .

$$\begin{aligned} {}_t^c D_t^\alpha S(t) &= \beta NP - dS - \delta S \\ {}_t^c D_t^\alpha P(t) &= \theta S - \gamma P \end{aligned} \quad (6)$$

Berdasarkan persamaan (6), diperoleh matriks F dan V sebagai berikut.

$$F = \begin{pmatrix} \beta NP \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan } V = \begin{pmatrix} dS + \delta S \\ -\theta + \gamma P \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Matriks Jacobian dari persamaan (7) dinyatakan dengan matriks $F = J(F)$ dan $V = J(V)$, yaitu

$$J(F) = \begin{pmatrix} 0 & \beta N \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } J(V) = \begin{pmatrix} d + \delta & 0 \\ -\theta & \mu \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Selanjutnya substitusi titik kesetimbangan bebas belanja online (E_0) ke persamaan (8), diperoleh

$$J(F_0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta A}{d} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } J(V_0) = \begin{pmatrix} d + \delta & 0 \\ -\theta & \mu \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Next Generation Matrix (Z) didefinisikan berdasarkan persamaan (9) dengan $Z = J(F_0)J(V_0)^{-1}$ yaitu

$$Z = \begin{pmatrix} \frac{\beta A \theta}{\gamma d(d + \delta)} & \frac{\beta A \gamma}{d} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Bilangan reproduksi dasar (R_0) merupakan nilai eigen positif terbesar dari matriks Z yaitu $R_0 = \rho(G)$ dengan ρ adalah nilai eigen terbesar. Untuk menentukan nilai eigen dari Z maka akan dicari persamaan karakteristik dari matriks Z , yaitu $|Z - \lambda I| = 0$, diperoleh

$$\left(\frac{\beta A \theta}{\gamma d(d + \delta)} - \lambda\right)(-\lambda) = 0 \quad (11)$$

sehingga diperoleh $\lambda_1 = \frac{\beta A \theta}{\gamma d(d + \delta)}$ dan $\lambda_2 = 0$. Jadi, bilangan reproduksi dasar dari sistem (3) adalah $R_0 = \frac{\beta A \theta}{\gamma d(d + \delta)}$.

3.2.3 Analisis Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan

Bersadarkan sistem (3), diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut.

$$J = \begin{pmatrix} -\beta P - d & \delta & -\beta N \\ \beta P & -(d + \delta) & \beta N \\ 0 & \theta & -\gamma \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Selanjutnya matriks Jacobian digunakan untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan E_0 dan E_1 .

3.2.3.1 Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan Bebas Belanja Online (E_0)

Substitusi titik kesetimbangan bebas belanja online (E_0) ke matriks Jacobian (12), diperoleh

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -d & \delta & -\frac{\beta A}{d} \\ 0 & -(d + \delta) & \frac{\beta A}{d} \\ 0 & \theta & -\gamma \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Selanjutnya menentukan nilai eigen dari matriks $J(E_0)$, dengan mencari persamaan karakteristik $|\lambda I - J(E_0)| = 0$, yaitu

$$\begin{vmatrix} (\lambda + d) & \delta & -\frac{\beta A}{d} \\ 0 & \lambda + (d + \delta) & \frac{\beta A}{d} \\ 0 & \theta & (\lambda + \gamma) \end{vmatrix} = 0. \quad (14)$$

Dengan menggunakan metode Sarrus, diperoleh persamaan karakteristik dari persamaan (14), yaitu

$$(\lambda + d) \left(\lambda^2 + (\gamma + d + \delta)\lambda + (d + \delta)\gamma - \frac{\theta\beta A}{d} \right) = 0. \quad (15)$$

Dari persamaan karakteristik, diperoleh nilai eigen yaitu $\lambda_1 = -d$ dimana $|\arg(\lambda_1)| = \left| \tan^{-1} \left(\frac{0}{-d} \right) \right| = \pi > \frac{\alpha\pi}{2}$ dengan dua nilai eigen lainnya yang merupakan akar-akar dari persamaan berbentuk polinomial berderajat dua yaitu

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \quad (16)$$

dengan $a_1 = (\gamma + d + \delta)$, $a_2 = (d + \delta)\gamma - \frac{\theta\beta A}{d}$. Karena $a_1 > 0$, maka persamaan (16) tidak mempunyai nilai eigen dengan bagian realnya positif. Dengan menggunakan Kriteria Routh-Hurwitz yang menjamin bahwa $a_1, a_2 > 0$, dengan syarat:

- a. $a_1 > 0$ yaitu $\gamma + d + \delta > 0$,
- b. $a_2 > 0$ yaitu $(d + \delta)\gamma - \frac{\theta\beta A}{d} > 0$.

Dari poin (b), didapatkan bahwa $(d + \delta)\gamma - \frac{\theta\beta A}{d} > 0$ atau $R_0 = \frac{\beta\theta A}{\gamma d(d + \delta)} < 1$, sehingga dapat disimpulkan bahwa jika $R_0 < 1$, maka untuk setiap nilai eigen λ_k memenuhi $|\arg(\lambda_k)| = \pi > \frac{\alpha\pi}{2}$ untuk $k = 1, 2, 3$.

3.2.3.2 Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Endemik Belanja Online (E_1)

Substitusi titik kesetimbangan bebas belanja online (E_1) ke matriks Jacobian (12), diperoleh

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -\frac{\beta\theta S}{\gamma} - d & \delta & -\frac{\beta\gamma(d + \delta)}{\beta\theta} \\ \frac{\beta\theta S}{\gamma} & -(d + \delta) & \frac{\beta\gamma(d + \delta)}{\beta\theta} \\ 0 & \theta & -\gamma \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Selanjutnya menentukan nilai eigen dari matriks $J(E_1)$, dengan mencari persamaan karakteristik $|\lambda I - J(E_1)| = 0$, yaitu

$$\begin{vmatrix} \lambda + \left(\frac{\beta\theta S}{\gamma} - d \right) & -\delta & \frac{\beta\gamma(d + \delta)}{\beta\theta} \\ -\frac{\beta\theta S}{\gamma} & \lambda + (d + \delta) & -\frac{\beta\gamma(d + \delta)}{\beta\theta} \\ 0 & -\theta & (\lambda + \gamma) \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

Dengan menggunakan metode Sarrus, diperoleh persamaan karakteristik dari (18), yaitu

$$\begin{aligned} \lambda^3 + [\gamma + (d + \delta) + (a + d)]\lambda^2 + ((d + \delta)\gamma + (a + d)(d + \delta) \\ - \gamma d - \gamma\delta - a\delta)\lambda + (a + d)\gamma + \gamma(a + d)(d + \delta) \\ + a\delta\gamma + a\delta\gamma - \gamma d(a + d) - \delta(a + d)\gamma - a\delta\gamma] = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Untuk menganalisis kestabilan lokal titik kesetimbangan E_1 , kriteria Routh-Hurwitz diterapkan pada polinomial karakteristik (19) untuk memperoleh nilai eigen. Jika koefisien pada polinomial karakteristik memenuhi kondisi/syarat $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, dan $a_1 a_2 - a_3 > 0$ maka akan didapatkan nilai eigen yang bagian realnya negatif sehingga memenuhi $|\arg(\lambda k)| = \pi > \frac{\alpha\pi}{2}$ untuk $k = 1, 2, 3$, sehingga titik kesetimbangan E_1 bersifat stabil. Berdasarkan polinomial karakteristik nilai eigen matriks $J(E_1)$ yang telah diperoleh, nilai-nilai koefisiennya adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= \gamma + (d + \delta) + (a + d), \\ a_2 &= (d + \delta)\gamma + (a + d)(d + \delta) - \gamma d - \gamma\delta - a\delta, \\ a_3 &= (a + d)\gamma + \gamma(a + d)(d + \delta) + a\delta\gamma + a\delta\gamma - \gamma d(a + d) - \\ &\quad \delta(a + d)\gamma - a\delta\gamma, \\ a_1 a_2 - a_3 &= \gamma d^2 + \gamma d\delta + 3ad^2 + 3d^2\delta + 2d^3 + 2ad\delta + \delta^2 d + \\ &\quad a^2 d - a\gamma - d\gamma, \end{aligned} \quad (20)$$

Selanjutnya dilakukan pengecekan terkait syarat dari kriteria Routh-Hurwitz sebagai berikut.

- Kondisi $a_1 > 0$ terpenuhi dengan syarat $\gamma > 0$, $d > 0$, $\delta > 0$, dan $a > 0$.
- Kondisi $a_2 > 0$ terpenuhi dengan syarat $(d + \delta)\gamma + (a + d)(d + \delta) > \gamma d + \gamma\delta + a\delta$.
- Kondisi $a_1 a_2 - a_3 > 0$ terpenuhi dengan syarat $\gamma d^2 + \gamma d\delta + 3ad^2 + 3d^2\delta + 2d^3 + 2ad\delta + \delta^2 d + a^2 d > a\gamma - d\gamma$.

3.2.4 Simulasi Numerik

Simulasi numerik bertujuan untuk memverifikasi hasil analisis kestabilan titik kesetimbangan. Terdapat dua jenis simulasi yang dilakukan, yaitu simulasi numerik untuk kondisi bebas belanja *online* dan simulasi numerik untuk kondisi endemik belanja *online*.

3.2.4.1 Simulasi Numerik dalam Keadaan Bebas Belanja Online

Berikut nilai awal dan nilai parameter yang digunakan.

Tabel 1. Nilai awal

Parameter	Nilai	Sumber
$N(0)$	150	Sharma (2021)
$S(0)$	150	Sharma (2021)
$P(0)$	150	Sharma (2021)

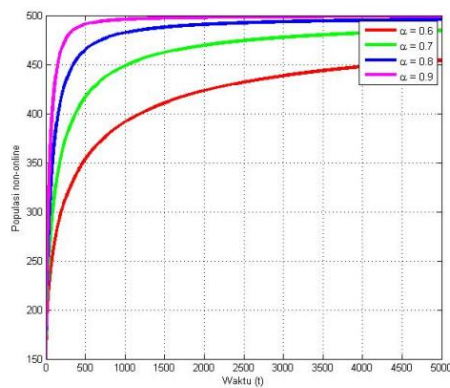
Tabel 2. Nilai Parameter

Parameter	Nilai	Sumber
A	10	Sharma (2021)
β	0.0002	Sharma (2021)
d	0.02	Sharma (2021)
δ	0.03	Sharma (2021)
θ	0.05	Sharma (2021)
γ	0.2	Maurya (2022)

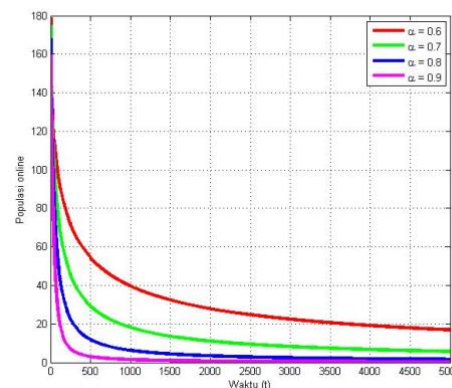
Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 1, diperoleh titik kesetimbangan sebagai berikut.

$$N^* = 500, S^* = 0, \text{ dan } P^* = 0. \quad (21)$$

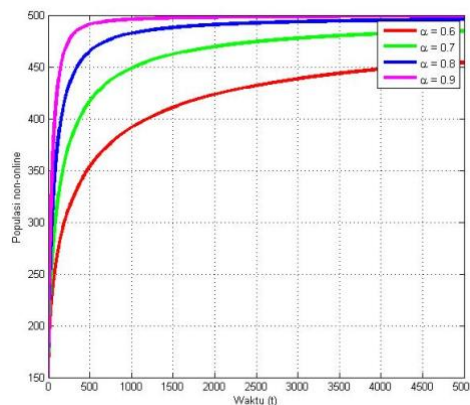
Hasil simulasi numerik dengan beberapa nilai α diilustrasikan pada gambar berikut.



Gambar 1. Populasi Pembeli Non-online $N(t)$



Gambar 2. Populasi Pembeli Online $S(t)$



Gambar 3. Kepadatan Informasi $P(t)$

Simulasi numerik dilakukan pada model fraksional ${}_t^c D_t^\alpha$ untuk beberapa nilai orde fraksional $\alpha = 0.6, 0.7, 0.8$, dan 0.9 . Berdasarkan Gambar 1 sampai 3, terlihat bahwa jumlah pembeli *online* $S(t)$ dan tingkat penyebaran informasi $P(t)$ sama-sama menurun hingga akhirnya hilang. Hal ini berarti bahwa dalam situasi tertentu, informasi mengenai manfaat belanja *online* tidak cukup kuat untuk membuat masyarakat berpindah dari belanja *offline* ke *online* sehingga seluruh populasi kembali menjadi pembeli non-*online* pada titik keseimbangan $(500,0,0)$. Perbedaan nilai α memberikan pengaruh pada seberapa cepat sistem mencapai titik tersebut. Nilai α yang lebih besar, seperti 0.9 , membuat kurva lebih cepat stabil, sedangkan nilai α yang lebih kecil (misalnya 0.6) membuat proses menuju keseimbangan berlangsung lebih lambat.

3.2.4.2 Simulasi Numerik dalam Keadaan Endemik Belanja Online

Berikut nilai awal dan nilai parameter yang digunakan.

Tabel 3. Nilai awal

Parameter	Nilai	Sumber
$N(0)$	150	Sharma (2021)
$S(0)$	150	Sharma (2021)

$P(0)$	150	Sharma (2021)
--------	-----	---------------

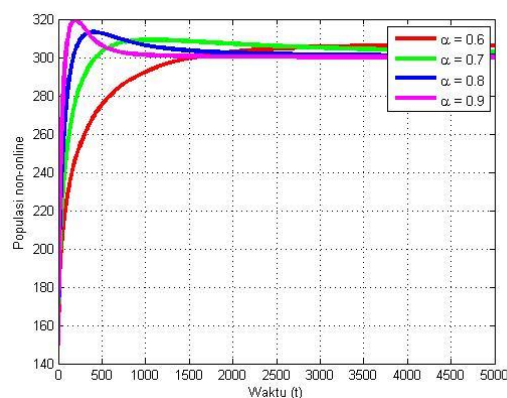
Tabel 4. Nilai Parameter

Parameter	Nilai	Sumber
A	10	Sharma (2021)
β	0.0002	Sharma (2021)
d	0.02	Sharma (2021)
δ	0.03	Sharma (2021)
θ	0.05	Sharma (2021)
γ	0.06	Sharma (2021)

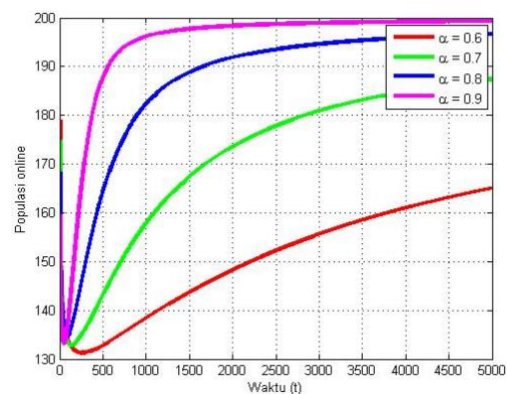
Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 4, diperoleh titik kesetimbangan sebagai berikut.

$$N^* = 300, S^* = 200, \text{ dan } P^* = 166.6667. \quad (22)$$

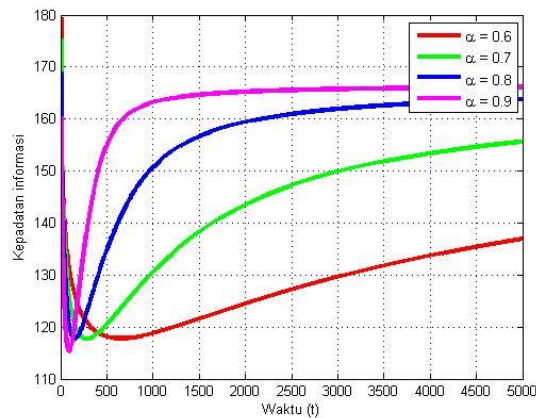
Hasil simulasi numerik dengan beberapa nilai α diilustrasikan pada gambar berikut.



Gambar 4. Populasi Pembeli Non-online $N(t)$



Gambar 5. Populasi Pembeli Online $S(t)$



Gambar 6. Kepadatan Informasi $P(t)$

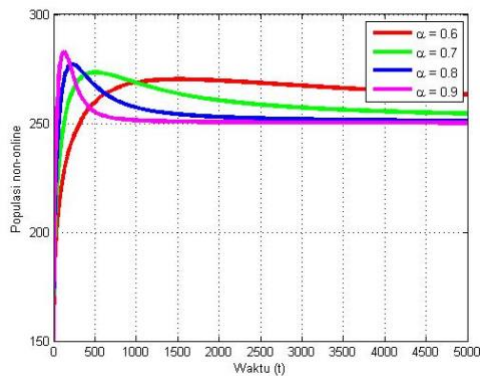
Berdasarkan Gambar 4 sampai 6, telah ditunjukkan bahwa ketiga variabel model bergerak menuju titik keseimbangan $(300, 200, 166.6667)$, yang menggambarkan kondisi ketika ada yang berbelanja *online*. Nilai $S(t) = 200$ menunjukkan bahwa sekelompok konsumen tetap memilih belanja online dalam jangka panjang, didorong oleh penyebaran informasi yang tidak hilang begitu saja. Hal ini terlihat dari nilai $P(t)$ yang stabil di sekitar 166.6667, menandakan bahwa informasi positif mengenai belanja *online* terus menyebar dan cukup kuat untuk mempertahankan minat masyarakat. Perbedaan nilai orde fraksional α memberikan pengaruh pada kecepatan sistem mencapai titik stabil. Untuk α yang lebih besar (misalnya 0.9), kurva lebih cepat konvergen ke keseimbangan endemik. Sebaliknya, pada α lebih kecil (seperti 0.6), proses menuju keseimbangan berlangsung lebih lambat.

3.2.4.3 Pengaruh Parameter θ dan γ pada Keadaan Endemik Belanja *Online*

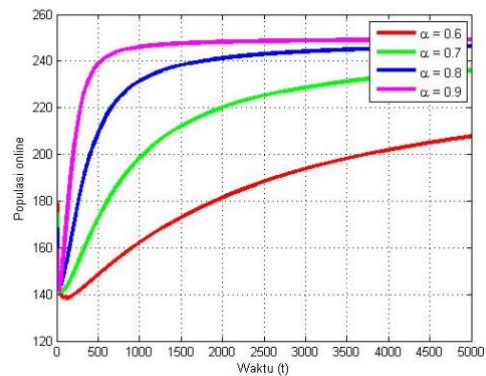
Selanjutnya, dilakukan simulasi numerik tambahan pada kondisi endemik dengan variasi nilai parameter θ (laju penambahan informasi) dan γ (laju penipisan informasi) untuk melihat pengaruh informasi terhadap penyebaran belanja online. Berikut adalah hasil simulasi numeriknya.

1. $\theta = 0.06$ dan $\gamma = 0.06$

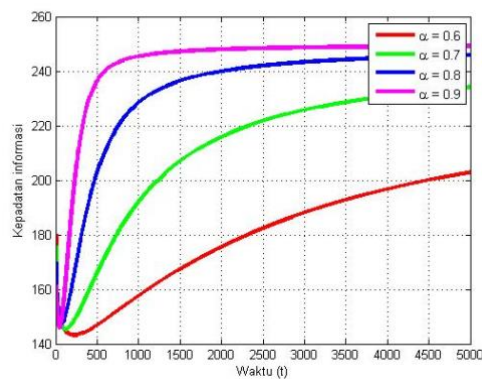
Dengan nilai $\theta = 0.06$ dan $\gamma = 0.06$, diperoleh nilai titik kesetimbangan endemik belanja *online* $N^* = 250$, $S^* = 250$, dan $P^* = 250$.



Gambar 7. Populasi Pembeli Non-online $N(t)$



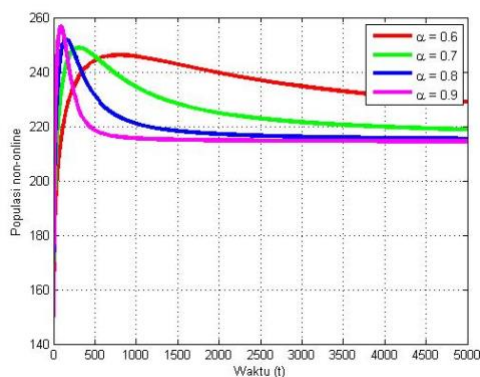
Gambar 8. Populasi Pembeli Online $S(t)$



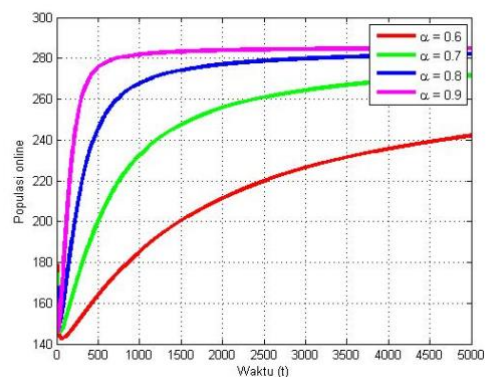
Gambar 9. Kepadatan Informasi $P(t)$

2. $\theta = 0.07$ dan $\gamma = 0.06$

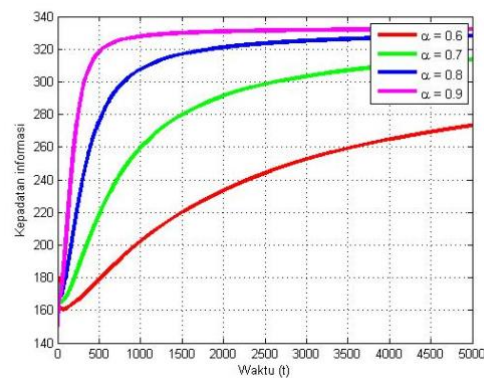
Dengan nilai $\theta = 0.07$ dan $\gamma = 0.06$, diperoleh nilai titik kesetimbangan endemik belanja online $N^* = 214.2857$, $S^* = 285.7143$, dan $P^* = 333.3333$.



Gambar 10. Populasi Pembeli Non-online $N(t)$



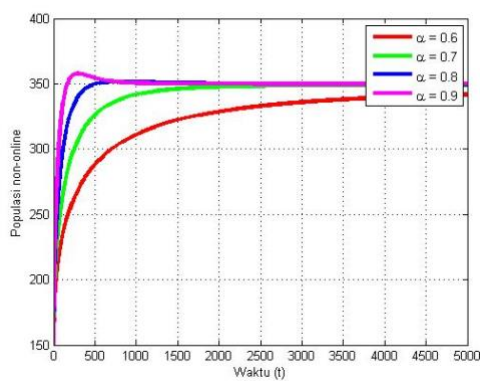
Gambar 11. Populasi Pembeli Online $S(t)$



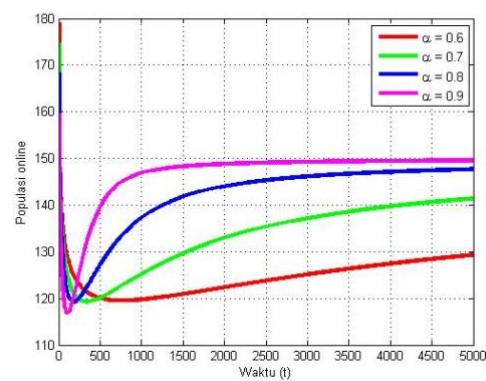
Gambar 12. Kepadatan Informasi $P(t)$

3. $\theta = 0.05$ dan $\gamma = 0.07$

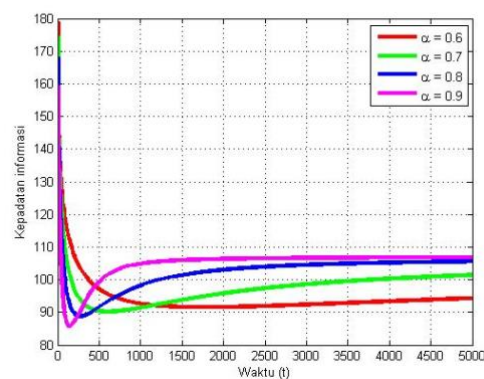
Dengan nilai $\theta = 0.05$ dan $\gamma = 0.07$, diperoleh nilai titik kesetimbangan endemik belanja *online* $N^* = 350$, $S^* = 150$, dan $P^* = 107.1428$.



Gambar 13. Populasi Pembeli Non-online $N(t)$



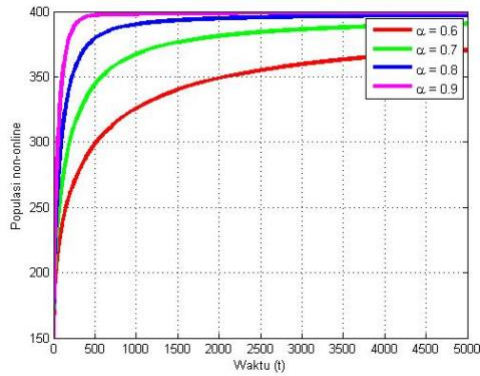
Gambar 14. Populasi Pembeli Online $S(t)$



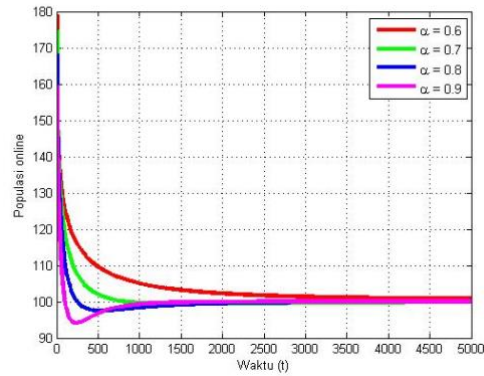
Gambar 15. Kepadatan Informasi $P(t)$

4. $\theta = 0.05$ dan $\gamma = 0.08$

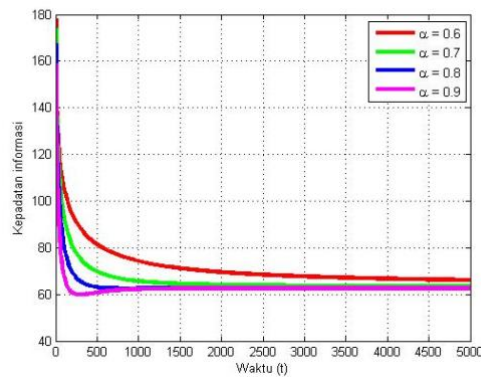
Dengan nilai $\theta = 0.05$ dan $\gamma = 0.08$, diperoleh nilai titik kesetimbangan endemik belanja *online* $N^* = 400$, $S^* = 100$, dan $P^* = 62.5000$.



Gambar 16. Populasi Pembeli Non-online $N(t)$



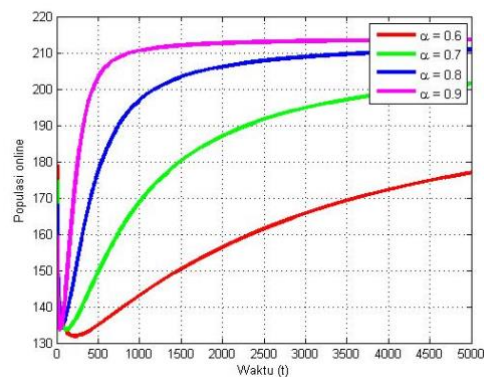
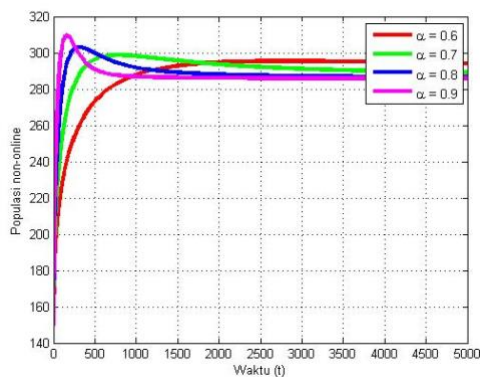
Gambar 17. Populasi Pembeli Online $S(t)$



Gambar 18. Kepadatan Informasi $P(t)$

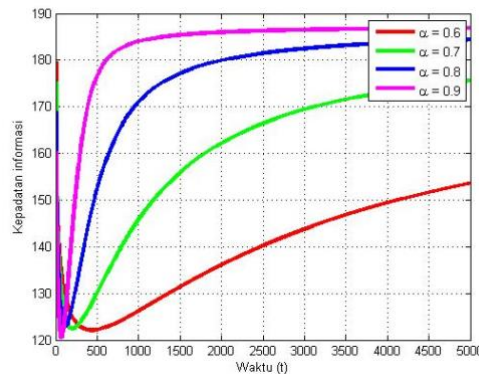
5. $\theta = 0.07$ dan $\gamma = 0.08$

Dengan nilai $\theta = 0.07$ dan $\gamma = 0.08$, diperoleh nilai titik kesetimbangan endemik belanja *online* $N^* = 285.7143$, $S^* = 214.2857$, dan $P^* = 187.5000$.



Gambar 20. Populasi Pembeli Online $S(t)$

Gambar 19. Populasi Pembeli Non-online
 $N(t)$



Gambar 21. Kepadatan Informasi $P(t)$

Berdasarkan hasil simulasi numerik pada kondisi endemik belanja *online* dengan berbagai nilai parameter θ dan γ , dapat disimpulkan bahwa dinamika belanja *online* sangat dipengaruhi oleh keseimbangan antara laju penambahan dan laju penipisan informasi. Ketika nilai θ lebih besar dan γ relatif rendah, informasi mengenai belanja *online* menyebar secara efektif dan bertahan lebih lama, sehingga mendorong perpindahan pembeli non-online ke pembeli *online* dalam jumlah yang lebih besar dan stabil. Sebaliknya, pada kondisi nilai γ yang tinggi, meskipun informasi dapat menyebar dengan cepat, pengaruhnya cepat berkurang sehingga perpindahan ke belanja *online* menjadi lebih lambat dan jumlah pembeli *online* yang bertahan cenderung lebih rendah. Hal ini menunjukkan bahwa keberlangsungan belanja *online* tidak hanya ditentukan oleh seberapa cepat informasi disebarkan, tetapi juga oleh kemampuan informasi tersebut untuk bertahan dalam sistem.

4. SIMPULAN

Penelitian ini menunjukkan bahwa dinamika belanja *online* dapat dimodelkan dengan baik menggunakan model matematika berorde fraksional yang mempertimbangkan peran penyebaran informasi. Hasil simulasi numerik memperlihatkan adanya dua kondisi kestabilan, yaitu keadaan bebas belanja *online* dan keadaan endemik belanja *online*. Pada kondisi bebas belanja *online*, informasi mengenai manfaat belanja *online* tidak cukup kuat untuk mempertahankan minat konsumen, sehingga seluruh populasi kembali menjadi pembeli non-online. Sebaliknya, pada kondisi endemik, informasi tetap bertahan dalam sistem dan mendorong sebagian konsumen untuk terus melakukan belanja *online* dalam jangka panjang. Nilai orde fraksional α berpengaruh terhadap kecepatan sistem mencapai titik kesetimbangan, di mana nilai α yang lebih besar menyebabkan sistem lebih cepat stabil. Selain itu, variasi parameter θ dan γ menunjukkan bahwa keberlangsungan belanja *online* sangat ditentukan oleh

keseimbangan antara laju penambahan dan laju penipisan informasi. Penyebaran informasi yang cepat dan bertahan lama mampu meningkatkan dan mempertahankan jumlah pembeli *online*, sedangkan penipisan informasi yang tinggi cenderung menghambat adopsi belanja online. Dengan demikian, penelitian ini menegaskan bahwa informasi memiliki peranan penting dalam membentuk dan menjaga kestabilan perilaku belanja *online* di masyarakat.

7. REFERENSI

- Aldhmour, F., & Sarayrah, I. (2016). An investigation of factors influencing consumers' intention to use online shopping: An empirical study in south of Jordan. *Journal of Internet Banking and Commerce*, 21.
- Andani, M. T., & Zulaikha, Z. (2025). Dynamical Analysis of Online Shopping with Beauty Influencer. *Jambura Journal of Mathematics*, 7(2), 205–212. <https://doi.org/10.37905/jjom.v7i2.33363>
- Angstmann, C. N., Henry, B. I., & McGann, A. V. (2016). A Fractional Order Recovery SIR Model from a Stochastic Process. *Bulletin of Mathematical Biology*, 78(3), 468–499. <https://doi.org/10.1007/s11538-016-0151-7>
- Bhattacharya, S., Gaurav, K., & Ghosh, S. (2019). Viral marketing on social networks: An epidemiological perspective. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 525, 478–490. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.03.008>
- Fauziyah, A. (2026). *Dynamic Analysis of a Modified SET P R Terrorism Model Incorporating Recidivism of Imprisoned Terrorists*. 11(2), 1773–1789.
- Huseynov, F., & Yıldırım, S. Ö. (2016). Internet users' attitudes toward business-to-consumer online shopping: A survey. *Information Development*, 32(3), 452–465. <https://doi.org/10.1177/0266666914554812>
- Kim, M., & Lennon, S. (2008). The effects of visual and verbal information on attitudes and purchase intentions in internet shopping. *Psychology & Marketing*, 25(2), 146–178. <https://doi.org/https://doi.org/10.1002/mar.20204>
- Lacitignola, D. (2021). Handling Hysteresis in a Referral Marketing Campaign with Self-Information. Hints from Epidemics. In *Mathematics* (Vol. 9, Number 6, p. 680). <https://doi.org/10.3390/math9060680>
- Li, P., Yang, X., Yang, L.-X., Xiong, Q., Wu, Y., & Tang, Y. Y. (2018). The modeling and analysis of the word-of-mouth marketing. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 493, 1–16. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.10.050>
- Ndii, M. Z. (2022). *Pemodelan matematika*. Penerbit NEM.
- Putri, D. M., & Zulaikha, Z. (2025). Mathematical Stability Analysis of Bullying's Impact on Student's Mental Health. *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni Dan Aplikasi*, 10(2), 1043–1053. <https://doi.org/10.18860/cauchy.v10i2.33212>
- Ramanjaneyulu, K., Naseema, P., & Ramanajneyulu, D. (2016). *E-commerce: It's Impact on consumer Behavior*.
- Rodrigues, H. S., & Fonseca, M. J. (2016). Can information be spread as a virus? Viral

- Marketing as epidemiological model. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39, 4780–4786. <https://doi.org/10.1002/mma.3783>
- Sharma, S. (2021). Modeling the role of information on the spread of online shopping. *Computational and Mathematical Methods*, 3(5), e1182. <https://doi.org/https://doi.org/10.1002/cmm4.1182>
- SINAGA, L. P., KARTIKA, D., & NASUTION, H. (n.d.). *Pengantar Sistem Dinamik*. Amal Insani Publisher.
- Tiwari, D. (2025). *A comparative study of e-Commerce and Commerce with reference to Customer's Trust*. 3, 1–6.