

Optimasi Penjadwalan Produksi Multi-Mesin Menggunakan Model Integer Programming pada UKM Manufaktur

Aprilia Rahmawati^{1*}, Fitri Maya Puspita², Sisca Octarina³

¹ Mahasiswa Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Sriwijaya, Indralaya

² Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Sriwijaya, Indralaya

³ Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Sriwijaya, Indralaya

apriliahma1027@gmail.com

Diterima: 23-08-2026; Direvisi: 16-09-2026; Dipublikasi: 21-09-2026

Abstract

Integer programming (IP) constitutes a fundamental framework in combinatorial optimization, extending linear programming by requiring decision variables to take integer values. This article presents a comprehensive narrative review of integer programming theory from the perspective of polyhedral analysis and cutting-plane methods. We examine the geometric relationship between the linear programming relaxation and the integer hull, the role of total unimodularity in guaranteeing integral extreme points, and the structural properties of valid inequalities that tighten this relaxation. The discussion covers the derivation of Chvátal-Gomory cuts, the geometry of branch-and-bound as a recursive partitioning of the feasible region, and Lagrangian relaxation as a dual bounding technique for integer programs, including the resulting integrality gap that distinguishes integer from linear duality. We further discuss recent developments connecting polyhedral theory with machine-learning-based cutting-plane selection. The findings show that polyhedral and geometric perspectives provide a coherent theoretical foundation for understanding why integer programs are computationally harder than their linear relaxations and how modern solvers exploit geometric structure to close the integrality gap. This review contributes to a deeper theoretical understanding of integer programming as a cornerstone of discrete optimization.

Keywords: integer programming; polyhedral theory; cutting planes; branch and bound; Lagrangian relaxation.

Abstrak

Integer programming (IP) merupakan kerangka fundamental dalam optimasi kombinatorial yang memperluas pemrograman linear dengan mensyaratkan variabel keputusan bernilai bulat. Artikel ini menyajikan tinjauan naratif komprehensif terhadap teori integer programming dari perspektif analisis polihedral dan metode bidang pemotong (cutting plane). Kami mengkaji hubungan geometris antara relaksasi pemrograman linear dan integer hull, peran total unimodularity dalam menjamin titik ekstrem bernilai bulat, serta sifat struktural dari valid inequality yang memperketat relaksasi tersebut. Pembahasan mencakup penurunan Chvátal-Gomory cut, interpretasi geometris branch and bound sebagai partisi rekursif dari daerah feasible, serta relaksasi Lagrange sebagai teknik pembatas dual untuk integer programming, termasuk gap dualitas (integrality gap) yang membedakan dualitas integer dari dualitas linear. Kami juga membahas perkembangan terkini yang menghubungkan teori polihedral dengan pemilihan bidang pemotong berbasis machine learning. Hasil kajian menunjukkan bahwa perspektif polihedral dan geometris memberikan fondasi teoritis yang koheren untuk memahami mengapa integer programming secara komputasi lebih sulit dibandingkan relaksasi liniernya, serta bagaimana solver modern memanfaatkan struktur geometris untuk menutup integrality gap. Tinjauan ini berkontribusi pada pemahaman teoritis yang lebih mendalam tentang integer programming sebagai fondasi optimasi diskret.

Kata Kunci: integer programming; teori polihedral; bidang pemotong; branch and bound; relaksasi lagrange.

1. PENDAHULUAN

Integer programming (IP) merupakan salah satu cabang optimasi matematis yang memiliki peran sentral dalam penyelesaian masalah keputusan diskret, mulai dari penjadwalan, perencanaan produksi, desain jaringan, hingga pembelajaran mesin kombinatorial (Wolsey, 2020). Berbeda dengan pemrograman linear (LP) yang mengizinkan variabel keputusan bernilai kontinu, integer programming mensyaratkan sebagian atau seluruh variabel keputusan bernilai bulat, sehingga daerah feasible tidak lagi berbentuk himpunan konveks kontinu melainkan himpunan titik-titik kisi (lattice points) yang tersebar di dalam suatu poliheder (Conforti *et al.*, 2014).

Secara historis, kerangka penyelesaian integer programming pertama kali dirintis oleh Gomory (1958) melalui algoritma bidang pemotong (cutting plane) yang secara sistematis memotong bagian relaksasi linear yang tidak memuat titik bulat, tanpa menghilangkan satupun solusi integer yang feasible. Perkembangan paralel oleh Land dan Doig memperkenalkan metode branch and bound sebagai strategi pencarian pohon (tree search) yang mempartisi daerah feasible relaksasi secara rekursif. Kedua paradigma ini kemudian disatukan dalam kerangka branch and cut yang menjadi tulang punggung solver integer programming modern (Huang *et al.*, 2021).

Dari perspektif teori polihedral, integer programming dapat dipahami sebagai persoalan mencari deskripsi linear dari integer hull, yaitu convex hull dari titik-titik bulat feasible (Cornuéjols, 2008). Basu, Conforti, dan Di Summa (2015) menunjukkan bahwa pendekatan geometris terhadap cut-generating function membuka jembatan yang elegan antara analisis konveks, geometri bilangan, dan teori integer programming, sementara Dey dan Molinaro (2018) menegaskan bahwa tantangan utama dalam pemilihan bidang pemotong masih bersifat terbuka secara teoritis meskipun praktik komputasinya telah matang. Perkembangan terbaru bahkan menghubungkan struktur polihedral ini dengan pendekatan pembelajaran mesin untuk pemilihan cut secara otomatis (Deza & Khalil, 2023).

Meskipun banyak survei teknis membahas algoritma cutting plane dan branch and bound secara terpisah dan berorientasi pada aspek komputasi (Huang *et al.*, 2021; Deza & Khalil, 2023), masih terbatas tinjauan naratif yang menyatukan ketiga pilar teoritis integer programming, yaitu struktur polihedral (integer hull dan total unimodularity), metode bidang pemotong (valid inequality), dan dualitas Lagrange, ke dalam satu kerangka geometris yang koheren. Kesenjangan inilah yang menjadi dasar orisinalitas artikel ini: menyajikan integer programming bukan sebagai kumpulan algoritma yang berdiri sendiri, melainkan sebagai satu kesatuan teori geometris tentang bagaimana daerah feasible kontinu direduksi menuju integer hull.

Berdasarkan uraian tersebut, tujuan penelitian ini adalah menyajikan tinjauan naratif komprehensif terhadap teori integer programming dengan penekanan pada perspektif polihedral dan geometris.

2. METODE PENELITIAN

Pemilihan metode narrative review, dibandingkan tinjauan sistematis berbasis PRISMA, didasarkan pada karakteristik objek kajian yang bersifat teoretis-konseptual, bukan empiris-kuantitatif. PRISMA dirancang untuk mengagregasi data numerik dari studi-studi empiris guna menjawab pertanyaan penelitian yang sempit dan terukur (Page et al., 2021), sementara objek kajian penelitian ini berupa teorema, definisi, dan struktur pembuktian yang tidak dapat diagregasi secara statistik, sehingga prosedur *screening* dan diagram alur PRISMA tidak relevan diterapkan. Menurut Grant dan Booth (2009), narrative review lebih tepat digunakan ketika tujuannya adalah menyintesis perkembangan suatu gagasan ilmiah secara konseptual dan lintas perspektif, bukan menjawab pertanyaan tunggal yang terukur. Metode ini dipilih karena memungkinkan eksplorasi konseptual yang mendalam terhadap definisi, teorema, dan hasil-hasil utama tanpa terbatas pada prosedur meta-analisis kuantitatif.

2.1 Desain Penelitian

Desain penelitian bersifat kualitatif-deskriptif dengan pendekatan studi literatur. Artikel-artikel ilmiah, buku teks rujukan, dan publikasi ilmiah yang relevan digunakan sebagai sumber data utama. Fokus kajian diarahkan pada aspek teoritis integer programming, meliputi relaksasi linear dan integer hull, total unimodularity, valid inequality dan bidang pemotong, branch and bound, serta relaksasi Lagrange dan integrality gap.

2.2 Teknik Pengumpulan Data

Tahapan pengumpulan data dilakukan melalui langkah-langkah berikut:

- a) identifikasi kata kunci utama, antara lain integer programming, polyhedral theory, cutting planes, branch and bound, dan Lagrangian relaxation.
- b) penelusuran literatur melalui basis data ilmiah seperti Google Scholar, SpringerLink, ScienceDirect, dan arXiv, yang dibatasi pada publikasi tahun 2015–2024 untuk menjaga relevansi dengan perkembangan teori terkini.
- c) seleksi literatur berdasarkan relevansi topik, tahun publikasi (2015-2024) untuk perkembangan terkini serta rujukan klasik yang menjadi fondasi teori, antara lain merujuk pada karya-karya utama seperti Wolsey (2020), Conforti, Cornuéjols, dan Zambelli (2014), Schrijver (1998), Basu, Conforti, dan Di Summa (2015), serta Dey dan Molinaro (2018).
- d) pengelompokan referensi berdasarkan tema pembahasan, seperti struktur polihedral, metode bidang pemotong, dan dualitas Lagrange.

2.3 Teknik Analisis Data

Analisis data dilakukan dengan mengkaji secara kritis isi literatur terpilih, membandingkan konsep-konsep utama, serta mensintesis temuan-temuan teoritis ke dalam kerangka pembahasan yang sistematis. Hasil analisis disajikan secara deskriptif-

analitis dengan menekankan hubungan antara formulasi matematis dan interpretasi geometris dari setiap konsep.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Formulasi Masalah Integer Programming dan Relaksasi Linear

a. Masalah Optimasi Integer Programming

Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, vektor $b \in \mathbb{R}^m$, dan vektor biaya $c \in \mathbb{R}^n$, masalah integer programming (IP) dalam bentuk baku dirumuskan sebagai:

$$\text{minimumkan } c^T x \quad (1)$$

$$\text{kendala } Ax \leq b, \quad x \geq 0, \quad x \in \mathbb{Z}^n \quad (2)$$

Ketika sebagian variabel diizinkan bernilai kontinu, masalah tersebut dinamakan mixed-integer programming (MIP) (Wolsey, 2020). Nilai optimal dari (1)-(2) dinotasikan sebagai $Z_{IP} = \min\{c^T x : x \in F \cap \mathbb{Z}^n\}$, dengan $F = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$ adalah daerah feasible kontinu.

b. Relaksasi Linear dan Integer Hull

Relaksasi linear (LP relaxation) dari (1)-(2) diperoleh dengan menghapus syarat ketegasan bilangan bulat, sehingga daerah feasible menjadi poliheder $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$. Karena setiap solusi feasible dari IP juga feasible terhadap relaksasinya, berlaku hubungan dualitas lemah:

$$Z_{LP} \leq Z_{IP} \quad (3)$$

dengan $Z_{LP} = \min\{c^T x : x \in P\}$ (Conforti *et al.*, 2014). Objek geometris kunci dalam teori integer programming adalah integer hull, yaitu:

$$P_I = \text{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n) \quad (4)$$

yang merupakan convex hull dari seluruh titik bulat feasible. Karena $P_I \subseteq P$, maka meminimumkan $c^T x$ pada P_I menghasilkan nilai yang sama dengan Z_{IP} , sehingga secara prinsip integer programming dapat diselesaikan sebagai masalah pemrograman linear atas P_I . Meyer (1974, dalam Schrijver, 1998) membuktikan bahwa jika A dan b rasional, maka P_I merupakan poliheder, meskipun P_I umumnya memiliki jumlah facet yang jauh lebih besar dan tidak diketahui secara eksplisit (Cornuéjols, 2008).

c. Interpretasi Geometris Relaksasi

Secara geometris, P dapat dibayangkan sebagai wadah kontinu yang membungkus P_I dari luar: P_I adalah 'kerangka' bertitik sudut bulat yang tersembunyi di dalam poliheder kontinu P . Semakin dekat bentuk P dengan P_I , semakin kecil pula selisih (gap) antara Z_{LP} dan Z_{IP} . Prinsip inilah yang mendasari seluruh metode bidang pemotong:

memperketat P secara bertahap agar mendekati P_I tanpa memotong satupun titik bulat feasible (Basu *et al.*, 2015).

3.2 Struktur Polihedral dan Total Unimodularity

a. Titik Ekstrem dan Total Unimodularity

Suatu matriks A dikatakan totally unimodular (TU) jika setiap submatriks bujur sangkar dari A memiliki determinan bernilai 0, 1, atau -1 (Schrijver, 1998). Sifat ini memiliki konsekuensi geometris yang kuat, sebagaimana dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1 (Hoffman-Kruskal). Jika A totally unimodular dan b bernilai bulat, maka poliheder $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$ memiliki seluruh titik ekstrem (vertex) bernilai bulat, sehingga $P = P_I$.

Implikasi Teorema 1 sangat mendasar: apabila matriks kendala suatu masalah memenuhi sifat TU, integer programming dapat diselesaikan secara eksak hanya dengan menyelesaikan relaksasi linearnya menggunakan metode simpleks atau titik interior, tanpa memerlukan algoritma integer programming sama sekali (Nemhauser & Wolsey, 1988). Contoh klasik matriks TU meliputi matriks insidensi graf bipartit, yang menjelaskan mengapa masalah penugasan (assignment problem) dan aliran jaringan (network flow) dapat diselesaikan secara polinomial meskipun secara formal merupakan masalah integer programming.

b. Karakterisasi Titik Ekstrem Poliheder

Secara umum, tanpa asumsi TU, tidak semua titik ekstrem P bernilai bulat. Suatu titik $x^* \in P$ disebut titik ekstrem jika x^* tidak dapat dituliskan sebagai kombinasi konveks nontrivial dari dua titik lain di P . Himpunan titik ekstrem P berkorespondensi dengan solusi basis feasible dari sistem $Ax \leq b$ (Bertsimas & Weismantel, 2005). Ketika sebagian titik ekstrem P bersifat fraksional, solusi optimal relaksasi LP dapat jatuh pada titik fraksional tersebut, sehingga $Z_{LP} < Z_I$ dan diperlukan mekanisme tambahan (bidang pemotong atau branch and bound) untuk mencapai solusi bulat optimal.

c. Facet dan Valid Inequality

Suatu pertidaksamaan $\pi^T x \leq \pi_0$ disebut valid inequality bagi P_I jika $\pi^T x \leq \pi_0$ dipenuhi oleh seluruh titik pada P_I . Valid inequality yang mendefinisikan facet (sisi berdimensi $n-1$) dari P_I disebut facet-defining inequality, dan merupakan pertidaksamaan 'terkuat' dalam arti tidak dapat diperlemah tanpa kehilangan validitasnya (Cornuéjols, 2008). Pencarian sistematis atas facet-defining inequality merupakan inti dari kombinatorial poliheder (polyhedral combinatorics) dan menjadi landasan teoritis bagi seluruh metode bidang pemotong modern (Basu *et al.*, 2015).

3.3 Metode Bidang Pemotong dan Branch and Bound

a. Penurunan Chvátal–Gomory Cut

Bidang pemotong Chvátal–Gomory (CG cut) merupakan salah satu keluarga valid inequality paling fundamental. Misalkan $a^T x \leq b$ adalah valid inequality bagi P dengan a bernilai bulat. Karena setiap $x \in P_I$ bernilai bulat, maka $a^T x$ juga bernilai bulat, sehingga berlaku penguatan:

$$a^T x \leq \lfloor b \rfloor \quad (5)$$

yang tetap valid bagi P_I meskipun mungkin memotong sebagian titik fraksional pada P (Gomory, 1958). Secara lebih umum, untuk sembarang vektor pengali $u \geq 0$ sedemikian sehingga $u^T A$ bernilai bulat, pertidaksamaan:

$$\lfloor u^T A \rfloor x \leq \lfloor u^T b \rfloor \quad (6)$$

merupakan valid inequality bagi P_I (Conforti *et al.*, 2014). Himpunan seluruh titik yang memenuhi semua CG cut yang mungkin dibentuk disebut Chvátal closure, dinotasikan P' . Chvátal (1973, dalam Cornuéjols, 2008) membuktikan bahwa P' adalah poliheder, dan penerapan closure ini secara berulang sebanyak berhingga kali akan menghasilkan tepat P_I ; banyaknya iterasi yang diperlukan dikenal sebagai Chvátal rank.

b. Valid Inequality Terstruktur dan Cut-Generating Function

Selain CG cut, keluarga valid inequality lain dikembangkan berdasarkan struktur khusus masalah, seperti intersection cut yang dibangun dari himpunan lattice-free convex (Balas, 1971) dan mixed-integer rounding cut. Basu, Conforti, dan Di Summa (2015) menunjukkan bahwa berbagai keluarga cut tersebut dapat disatukan melalui kerangka cut-generating function, yaitu fungsi ψ yang memetakan data kendala menjadi koefisien valid inequality secara sistematis berdasarkan himpunan lattice-free maksimal. Kerangka ini menghubungkan teori bilangan geometris (geometry of numbers) dengan analisis konveks, dan menjadi dasar teoritis bagi split cut dan cut berbasis dua baris tableau simpleks.

c. Branch and Bound sebagai Partisi Geometris

Berbeda dengan bidang pemotong yang memperketat P secara global, branch and bound menyelesaikan integer programming melalui partisi rekursif daerah feasible. Diberikan solusi optimal relaksasi LP pada suatu simpul (node) dengan komponen fraksional x_j^* , daerah feasible dipartisi menjadi dua subpoliheder anak:

$$P_1 = P \cap \{x : x_j \leq \lfloor x_j^* \rfloor\} \quad \text{dan} \quad P_2 = P \cap \{x : x_j \geq \lceil x_j^* \rceil\} \quad (7)$$

Karena tidak ada titik bulat pada interval terbuka $(\lfloor x_j^* \rfloor, \lceil x_j^* \rceil)$, partisi ini tidak menghilangkan satupun solusi integer feasible, sehingga $P_I \subseteq P_1 \cup P_2 \cup (P \cap \mathbb{Z}^n \text{ tanpa perubahan pada komponen lain})$ (Huang *et al.*, 2021). Proses ini membentuk pohon pencarian (search tree) yang secara geometris merepresentasikan pemotongan berulang ruang solusi menjadi kotak-kotak (box) yang semakin kecil. Batas bawah (lower bound) dari solusi relaksasi LP pada setiap simpul digunakan untuk memangkas (prune) cabang

yang dijamin tidak memuat solusi lebih baik dari incumbent terbaik yang telah ditemukan.

Dalam praktiknya, solver modern menggabungkan kedua paradigma tersebut menjadi branch and cut, yaitu menambahkan bidang pemotong pada setiap simpul pohon branch and bound untuk memperketat relaksasi lokal sebelum melakukan percabangan lebih lanjut (Deza & Khalil, 2023). Pemilihan bidang pemotong yang efektif pada setiap simpul, yang secara teoritis masih menjadi masalah terbuka (Dey & Molinaro, 2018), kini banyak didekati menggunakan graph neural network yang mempelajari pola geometris efektivitas cut dari data historis penyelesaian (Deza & Khalil, 2023).

3.4 Relaksasi Lagrange dan Integrality Gap

a. Fungsi Dual Lagrange untuk Integer Programming

Misalkan kendala $Ax \leq b$ dipartisi menjadi dua himpunan, $D_1x \leq d_1$ (kendala 'sulit') dan $x \in X$ (kendala 'mudah', termasuk syarat integer), sehingga masalah (1)-(2) dapat ditulis sebagai minimumkan $c^T x$ dengan kendala $D_1x \leq d_1$ dan $x \in X \cap \mathbb{Z}^n$. Fungsi Lagrange dibentuk dengan merelaksasi kendala sulit ke dalam fungsi objektif:

$$L(x, \lambda) = c^T x + \lambda^T (D_1 x - d_1), \quad \lambda \geq 0 \quad (8)$$

Fungsi dual Lagrange didefinisikan sebagai $g(\lambda) = \min\{L(x, \lambda) : x \in X \cap \mathbb{Z}^n\}$ (Geoffrion, 1974). Karena minimisasi dilakukan atas himpunan diskret $X \cap \mathbb{Z}^n$, fungsi g bersifat piecewise linear dan cekung (concave), sama seperti pada kasus kontinu, sehingga dualitas lemah tetap berlaku:

$$g(\lambda) \leq Z_{Ip} \quad \text{untuk setiap } \lambda \geq 0 \quad (9)$$

Nilai dual optimal $d^* = \max\{g(\lambda) : \lambda \geq 0\}$ memberikan batas bawah bagi Z_{Ip} (Geoffrion, 1974).

b. Integrality Gap: Perbedaan Fundamental dari Kasus Konveks

Berbeda dengan optimasi konveks, di mana Slater's condition menjamin dualitas kuat ($d^* = p^*$) sebagaimana dibahas dalam teori dualitas Lagrange klasik (Bertsekas, 2022), pada integer programming umumnya berlaku dualitas lemah yang ketat, yaitu $d^* < Z_{Ip}$, sebuah fenomena yang dikenal sebagai integrality gap. Hal ini terjadi karena $X \cap \mathbb{Z}^n$ bukan himpunan konveks, sehingga argumen pemisahan hyperplane yang mendasari dualitas kuat pada kasus konveks tidak berlaku secara langsung (Nemhauser & Wolsey, 1988).

Teorema 2 (Geoffrion, 1974). Nilai dual Lagrange optimal d^* sama dengan nilai optimal relaksasi linear dari convex hull kendala yang direlaksasi, yaitu $d^* = \min\{c^T x : x \in \text{conv}(X \cap \mathbb{Z}^n), D_1 x \leq d_1\}$. Akibatnya, $d^* = Z_{Lp}$ apabila $\text{conv}(X \cap \mathbb{Z}^n) = \{x \in X : x \geq 0\}$ (yakni ketika kendala 'mudah' memenuhi sifat integrality), dan d^* dapat lebih

ketat daripada Z_{LP} apabila $\text{conv}(X \cap \mathbb{Z}^n)$ merupakan himpunan bagian sejati dari relaksasi kontinu X .

Sifat inilah, yang dikenal sebagai integrality property, menjelaskan mengapa relaksasi Lagrange sering kali memberikan batas bawah yang lebih ketat dibandingkan relaksasi linear standar pada masalah dengan struktur kombinatorial tertentu, seperti masalah penugasan generalized atau traveling salesman problem, di mana $X \cap \mathbb{Z}^n$ memiliki struktur polihedral yang jauh lebih ringkas daripada relaksasi kontinunya (Geoffrion, 1974; Bertsimas & Weismantel, 2005).

c. Interpretasi Geometris Integrality Gap dan Keterkaitan dengan Bidang Pemotong

Secara geometris, integrality gap dapat dipahami sebagai jarak vertikal antara hyperplane pendukung terbaik yang dapat dibentuk oleh kombinasi linear kendala (yaitu batas dari relaksasi Lagrange atau LP) dengan facet sebenarnya dari integer hull P_I . Ketika himpunan relaksasi $X \cap \mathbb{Z}^n$ memiliki convex hull yang identik dengan relaksasi kontinunya, tidak ada gap yang tersisa, sebagaimana terjadi pada kasus matriks totally unimodular (Teorema 1). Sebaliknya, ketika struktur kombinatorial menghasilkan convex hull yang jauh lebih kompleks, diperlukan valid inequality tambahan (Bagian 3.3) untuk secara bertahap memperketat relaksasi menuju P_I dan menutup gap tersebut (Basu *et al.*, 2015; Dey & Molinaro, 2018). Dengan demikian, relaksasi Lagrange, bidang pemotong, dan branch and bound bukan tiga metode yang terpisah, melainkan tiga strategi geometris yang saling melengkapi dalam upaya mendekati integer hull dari arah yang berbeda-beda.

Secara keseluruhan, hasil kajian pada Bagian 3.1-3.4 menunjukkan bahwa seluruh metode penyelesaian integer programming, baik bidang pemotong, branch and bound, maupun relaksasi Lagrange, dapat dipandang sebagai upaya geometris untuk mendekatkan relaksasi kontinu P terhadap integer hull P_I . Perspektif polihedral ini konsisten dengan temuan pada literatur terkini yang menunjukkan bahwa kemajuan solver integer programming modern sangat bergantung pada seberapa efektif struktur geometris tersebut dieksplorasi, baik melalui teori cut-generating function (Basu *et al.*, 2015) maupun melalui pendekatan berbasis data seperti pembelajaran mesin (Deza & Khalil, 2023).

4. SIMPULAN

Penelitian ini telah menyajikan tinjauan naratif komprehensif terhadap teori integer programming dengan penekanan pada perspektif polihedral dan geometris modern. Pembahasan mencakup formulasi masalah integer programming dan relaksasi linearnya, struktur polihedral dan total unimodularity sebagai syarat cukup bagi keselarasan relaksasi LP dengan integer hull, metode bidang pemotong Chvátal–Gomory dan interpretasi geometris branch and bound sebagai partisi rekursif daerah feasible, serta relaksasi Lagrange beserta fenomena integrality gap yang membedakan dualitas

integer programming dari dualitas optimasi konveks. Hasil tinjauan menunjukkan bahwa perspektif geometris memberikan pemahaman yang koheren tentang keterkaitan antar-metode penyelesaian integer programming, sekaligus mempertegas posisi teori polihedral sebagai fondasi dari solver integer programming modern.

5. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada dosen pembimbing dan rekan-rekan di Program Studi Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya atas diskusi yang bermanfaat terkait topik ini. Penulis juga berterima kasih kepada reviewer anonim yang telah memberikan masukan konstruktif untuk meningkatkan kualitas artikel ini.

6. REKOMENDASI

Penelitian selanjutnya disarankan untuk mengeksplorasi keterkaitan teori polihedral dengan pendekatan pembelajaran mesin dalam pemilihan bidang pemotong secara lebih mendalam, mengingat perkembangan pesat pada area ini masih menyisakan tantangan teoritis dalam hal jaminan konvergensi dan generalisasi (Deza & Khalil, 2023). Selain itu, kajian lanjutan mengenai integrality gap pada kelas masalah integer programming berskala besar dan berstruktur khusus, seperti masalah pada jaringan atau graf, berpotensi memberikan wawasan baru mengenai kapan relaksasi Lagrange dapat menggantikan bidang pemotong secara efisien.

Penelitian lanjutan juga direkomendasikan untuk mengintegrasikan kajian teoretis dengan studi numerik atau simulasi komputasi menggunakan solver integer programming standar, sehingga interpretasi geometris integer hull dan integrality gap dapat divisualisasikan secara lebih konkret pada instansi berdimensi rendah. Pendekatan ini diharapkan mampu meningkatkan pemahaman konseptual serta memperluas penerapan teori polihedral dalam optimasi kombinatorial terapan.

Adapun hambatan yang berpotensi memengaruhi penelitian selanjutnya meliputi keterbatasan literatur yang secara eksplisit menyatukan perspektif polihedral, algoritmik, dan dualitas dalam satu kerangka, serta tingginya kompleksitas matematis dalam pembuktian teorema-teorema lanjutan terkait cut-generating function dan integrality gap. Oleh karena itu, diperlukan ketelitian dalam pemilihan pendekatan teoretis dan kehati-hatian dalam penyajian analisis agar hasil penelitian tetap sistematis, koheren, dan mudah dipahami.

7. REFERENSI

Andersen, K., Louveaux, Q., Weismantel, R., & Wolsey, L. A. (2007). Inequalities from two rows of a simplex tableau. In M. Fischetti & D. P. Williamson (Eds.), *Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO 2007)*, Lecture Notes in Computer Science (Vol. 4513, pp. 1–15). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-540-72792-7_1

- Balas, E. (1971). Intersection cuts—A new type of cutting planes for integer programming. *Operations Research*, 19(1), 19–39. <https://doi.org/10.1287/opre.19.1.19>
- Basu, A., Conforti, M., & Di Summa, M. (2015). A geometric approach to cut-generating functions. *Mathematical Programming*, 151(1), 153–189. <https://doi.org/10.1007/s10107-015-0890-5>
- Basu, A., Conforti, M., Di Summa, M., & Jiang, H. (2021). Complexity of branch-and-bound and cutting planes in mixed-integer optimization II. In K. Aardal & L. Sanità (Eds.), *Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO 2021)*, Lecture Notes in Computer Science (Vol. 12707, pp. 383–398). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-73879-2_27
- Bertsekas, D. P. (2022). *Convex optimization algorithms*. Athena Scientific.
- Bertsimas, D., & Weismantel, R. (2005). *Optimization over integers*. Dynamic Ideas.
- Conforti, M., Cornuéjols, G., & Zambelli, G. (2014). *Integer programming*. Springer.
- Cornuéjols, G. (2008). Valid inequalities for mixed integer linear programs. *Mathematical Programming*, 112(1), 3–44. <https://doi.org/10.1007/s10107-006-0086-0>
- Dey, S. S., & Molinaro, M. (2018). Theoretical challenges towards cutting-plane selection. *Mathematical Programming*, 170(1), 237–266. <https://doi.org/10.1007/s10107-018-1302-4>
- Deza, A., & Khalil, E. B. (2023). Machine learning for cutting planes in integer programming: A survey. In *Proceedings of the Thirty-Second International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-23)* (pp. 6592–6600). <https://doi.org/10.24963/ijcai.2023/739>
- Geoffrion, A. M. (1974). Lagrangian relaxation for integer programming. *Mathematical Programming Study*, 2, 82–114. <https://doi.org/10.1007/BFb0120690>
- Gomory, R. E. (1958). Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 64(5), 275–278. <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1958-10224-4>
- Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2021). *Introduction to operations research* (11th ed.). McGraw-Hill Education.
- Huang, L., Chen, X., Huo, W., Wang, J., Zhang, F., Bai, B., & Shi, L. (2021). Branch and bound in mixed integer linear programming problems: A survey of techniques and trends. *arXiv preprint arXiv:2111.06257*.
- Nemhauser, G. L., & Wolsey, L. A. (1988). *Integer and combinatorial optimization*. Wiley.
- Schrijver, A. (1998). *Theory of linear and integer programming*. Wiley.
- Wolsey, L. A. (2020). *Integer programming* (2nd ed.). Wiley.