

Pewarnaan Pelangi pada Graf Garis dari Graf Ilalang ($S_{3,r}$)

Dewi Nur Angriani Rauf, Novianita Achmad*, Nisky Imansyah Yahya

Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Gorontalo, Gorontalo

novianita.achmad@ung.ac.id

Diterima: 26-02-2025; Direvisi: 27-03-2025; Dipublikasi: 29-03-2025

Abstract

The rainbow connection number, denoted by $rc(G)$, is the minimum number of colors required to color the edges of a graph G such that the graph is rainbow connected. A graph G is said to be rainbow connected if every pair of vertices in the graph has at least one rainbow path, a path in which each edge has a different color. Rainbow coloring has been extensively studied on various types of graphs and their modifications, including line graphs. The line graph $L(G)$ of a graph G is a graph whose vertex set is $V(L(G)) = E(G)$, meaning each vertex in $L(G)$ represents an edge of G . Two vertices in $L(G)$ are adjacent if and only if their corresponding edges in G share a common vertex. This study examines the rainbow coloring of the line graph of the ilalang graph $(S_{n,r})$ for $n = 3$ and $r \geq 3$. Based on the research findings, the rainbow connection number of the line graph of the ilalang graph is given by the theorem $rc(L(S_{3,r})) = r$ for $r \geq 3$.

Keywords: rainbow connected; line graph; ilalang graph

Abstrak

Bilangan terhubung pelangi dinotasikan dengan $rc(G)$ dan merupakan jumlah warna paling sedikit yang dibutuhkan untuk mewarnai sisi-sisi dari graf G agar graf tersebut terhubung pelangi. Suatu graf G dikatakan terhubung pelangi, jika setiap pasangan titik dalam graf tersebut memiliki setidaknya satu lintasan pelangi, yaitu lintasan di mana setiap sisi memiliki warna yang berbeda. Pewarnaan pelangi telah banyak dikaji pada berbagai jenis graf dan modifikasinya, termasuk graf garis. Graf garis $L(G)$ dari suatu graf G adalah graf yang memiliki himpunan titik $V(L(G)) = E(G)$, yaitu setiap titik dalam $L(G)$ merepresentasikan satu sisi dari G . Dua titik dalam $L(G)$ bertetangga jika dan hanya jika sisi-sisi yang bersesuaian di G memiliki titik yang sama. Penelitian ini membahas tentang pewarnaan pelangi pada graf garis dari graf ilalang $(S_{n,r})$ dengan $n = 3$ dan $r \geq 3$. Berdasarkan penelitian diperoleh teorema bilangan terhubung pelangi pada graf garis dari graf ilalang $rc(L(S_{3,r})) = r$ untuk $r \geq 3$.

Kata Kunci: pewarnaan pelangi; graf garis; graf ilalang

1. PENDAHULUAN

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh ilmuwan matematika asal Swiss, Leonhard Euler, pada tahun 1736 melalui penyelesaiannya terhadap permasalahan jembatan Königsberg di Rusia. Dalam pendekatannya, Euler merepresentasikan permasalahan tersebut dalam bentuk graf. Secara umum, sebuah graf G merupakan struktur matematika yang merepresentasikan hubungan antara objek-objek. Graf terdiri dari

himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ di mana setiap sisi menghubungkan sepasang titik (Diestel, 2024).

Salah satu topik yang menarik untuk dikaji dalam bidang teori graf adalah pewarnaan graf. Pewarnaan graf merupakan proses pemetaan warna pada setiap titik, sisi, maupun wilayah dalam sebuah graf G , sedemikian rupa sehingga setiap unsur-unsur graf yang bertetangga harus memiliki warna yang berbeda. Salah satu konsep dalam pewarnaan graf adalah pewarnaan pelangi, yang berfokus pada keterhubungan graf melalui pewarnaan sisi. Suatu graf G dikatakan terhubung pelangi, jika setiap pasangan titik dalam graf tersebut memiliki setidaknya satu lintasan pelangi, yaitu lintasan di mana setiap sisi memiliki warna yang berbeda (Prमितasari et al., 2024). Konsep bilangan terhubung pelangi pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand pada tahun 2008 (Chartrand et al., 2008), dinotasikan dengan $rc(G)$ dan merupakan jumlah warna paling sedikit yang dibutuhkan untuk mewarnai sisi-sisi dari graf G agar graf tersebut terhubung pelangi. Sebuah graf yang berukuran m sisi dan mempunyai diameter $diam(G)$, berlaku hubungan $diam(G) \leq rc(G) \leq m$ (Chartrand et al., 2008). Beberapa penelitian relevan tentang bilangan terhubung pelangi sebelumnya telah diteliti oleh Firman et al. (2022) pada keluarga graf roda, yaitu pada graf kincir angin belanda ($D_5^{(m)}$), graf lemon (Le_n), graf kincir angin belanda tertutup ($CD_4^{(m)}$) dan graf bunga matahari (Sf_n). Humolungo et al. (2022) meneliti bilangan terhubung pelangi dengan menggunakan operasi korona pada graf antiprisma (AP_n) dan graf lengkap (K_4) dan Syah & Budayasa (2021) meneliti tentang pewarnaan pelangi pada graf snark bunga (B_n).

Kajian mengenai bilangan terhubung pelangi terus berkembang dengan berbagai pendekatan dan aplikasinya pada berbagai jenis graf. Salah satu bentuk modifikasi graf yang menarik untuk diteliti dalam pewarnaan pelangi adalah graf garis. Graf garis $L(G)$ dari suatu graf G adalah graf yang memiliki himpunan titik $V(L(G)) = E(G)$, yaitu setiap titik dalam $L(G)$ merepresentasikan satu sisi dari G . Dua titik dalam $L(G)$ bertetangga jika dan hanya jika sisi-sisi yang bersesuaian di G memiliki titik yang sama (Harris et al., 2008). Graf garis juga sering digunakan dalam berbagai aplikasi, termasuk analisis jaringan dan optimasi kombinatorial. Beberapa penelitian telah mengkaji pewarnaan pelangi pada graf garis. Rahmawati et al. (2020) meneliti pewarnaan pelangi total dari bentuk graf garis dan graf garis ganda pada graf sikat (B_n). Penelitian lain oleh Bella et al. (2020) membahas tentang pewarnaan titik pelangi pada graf kuadratik dari graf kembang api ($F_{n,k}^2$) dan graf garis dari graf kembang api ($L(F_{n,k})$) dengan $n \geq 2$ dan $k = 3$. Selain itu, penelitian lain (Tadjuddin, 2025) juga mengkaji dimensi metrik lokal pada graf garis dari graf Petersen diperumum $P_{n,1}$. Kajian lain mengenai pewarnaan pada graf garis dilakukan dalam penelitian Sari (2023) yang meneliti bilangan r-kromatik dari pewarnaan titik r-dinamis dari beberapa modifikasi graf, termasuk graf garis pada graf sisir $L(P_n \odot K_1)$. Selain itu (Khairiah et al., 2020) juga meneliti dimensi partisi pada graf garis dari graf sisir ($L(Cb_n)$). Berdasarkan beberapa penelitian sebelumnya, penulis

dalam hal ini tertarik untuk mengkaji bagaimana masalah bilangan terhubung pelangi pada graf garis dari graf ilalang ($S_{n,r}$).

2. METODE PELAKSANAAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur (*library research*), yaitu mengkaji sumber dari jurnal ilmiah dan artikel yang relevan dengan bilangan terhubung pelangi pada graf garis. Tujuan dari metode ini adalah memperoleh informasi dan menentukan pendekatan yang digunakan dalam pembahasan masalah terkait. Berikut adalah tahapan-tahapan yang dilakukan pada penelitian ini :

- i. Menggambar graf garis $L(G)$ dari graf ilalang ($S_{3,r}$).
- ii. Menentukan dan memperoleh pola bilangan terhubung pelangi $rc(G)$ yang diperoleh dari gambar pada tahap satu.
- iii. Membuktikan teorema bilangan terhubung pelangi berdasarkan gambar graf yang dihasilkan pada tahap satu.
- iv. Merumuskan kesimpulan

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Graf Garis ($L(G)$) dari Graf Ilalang ($S_{3,r}$)

Definisi 1. Misalkan r adalah bilangan bulat dengan $r \geq 3$. Graf $L(S_{3,r})$ merupakan graf garis dari graf ilalang ($S_{3,r}$), yang didefinisikan sebagai graf G . Himpunan titik dan sisi graf G secara berturut-turut didefinisikan sebagai berikut :

$$V(G) = \{u'_i | i \in [1, r]\} \cup \{v'_{i,j} | i \in [1, r], j \in [1, 3]\}$$

$$E(G) = \{u'_i u'_{i+l} | i \in [1, r-1], l \in [1, r-i]\} \cup \{u'_i v'_{i,j} | i \in [1, r], j \in [1, 3]\} \cup \{v'_{i,j} v'_{i,j+1} | i \in [1, r], j \in [1, 2]\} \cup \{v'_{i,1} v'_{i,3} | i \in [1, r]\} \cup \{u'_r, u'_1\}$$

3.2 Bilangan Terhubung Pelangi $L(S_{3,r})$

Teorema 2. Misalkan r merupakan bilangan bulat dengan $r \geq 3$ dan $G \cong L(S_{3,r})$, maka:

$$rc(G) = r$$

Bukti. Berdasarkan Teorema (Chartrand et al., 2008), diketahui bahwa $rc(G) \geq diam(G)$. Jika $rc(G) = diam(G)$, maka cukup menunjukkan adanya lintasan pelangi dengan pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, rc(G)\}$. Sedangkan, jika $rc(G) > diam(G)$, maka pembuktiannya perlu dilakukan dengan kontradiksi. Oleh karena itu, pembuktian pada Teorema 2 ini dibagi menjadi dua kasus, yaitu r ganjil dan r genap. Pembuktian pada r ganjil terdiri atas dua subkasus, yaitu kasus pertama ketika $r = 3$ karena $rc(G) = diam(G)$ bisa dibuktikan langsung dengan menunjukkan lintasan dengan pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, diam(G)\}$ dan kasus kedua untuk $r \geq 5$ karena $rc(G) > diam(G)$ maka

dibuktikan dengan kontradiksi. Sedangkan untuk kasus r genap, karena $rc(G) > diam(G)$ maka diperlukan pembuktian dengan kontradiksi.

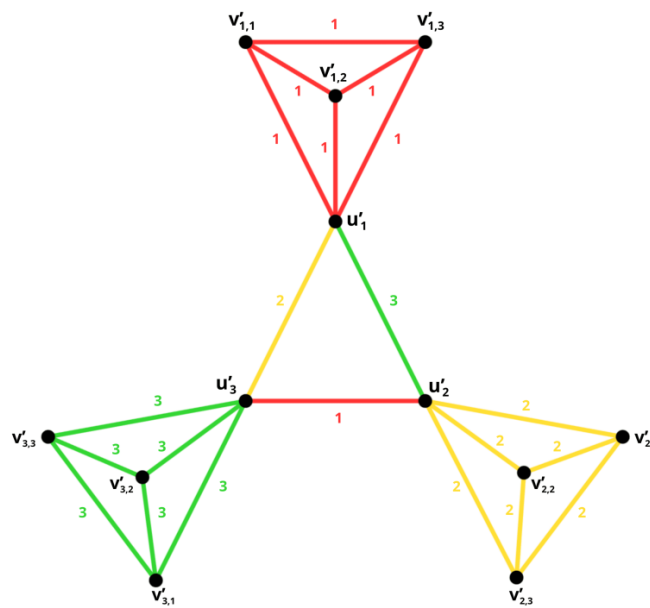
Kasus 1. r ganjil

Subkasus 1. $r = 3, diam = 3$

Karena $rc(G) = diam(G) = 3$ maka Teorema 2 cukup dibuktikan dengan menunjukkan terdapat lintasan pelangi dengan pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ pada graf $L(S_{3,r})$ untuk $r = 3$ dengan definisi pewarnaan pelangi sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 c(u'_i u'_{i+1}) &= \begin{cases} i + \frac{r+1}{2} & i \in \left[\frac{r+1}{2}, r-1\right] \\ i - \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor & i \in \left[1, \frac{r-1}{2}\right] \end{cases} \\
 c(u'_i v'_{i,j}) &= i & i \in [1, r], j \in [1, 3] \\
 c(v'_{i,j} v'_{i,j+1}) &= i & i \in [1, r], j \in [1, 2] \\
 c(v'_{i,1} v'_{i,3}) &= i & i \in [1, r] \\
 c(u'_r u'_1) &= \frac{r+1}{2}
 \end{aligned}$$

Berikut merupakan ilustrasi pewarnaan pelangi pada graf $L(S_{3,r})$ untuk $r = 3$:

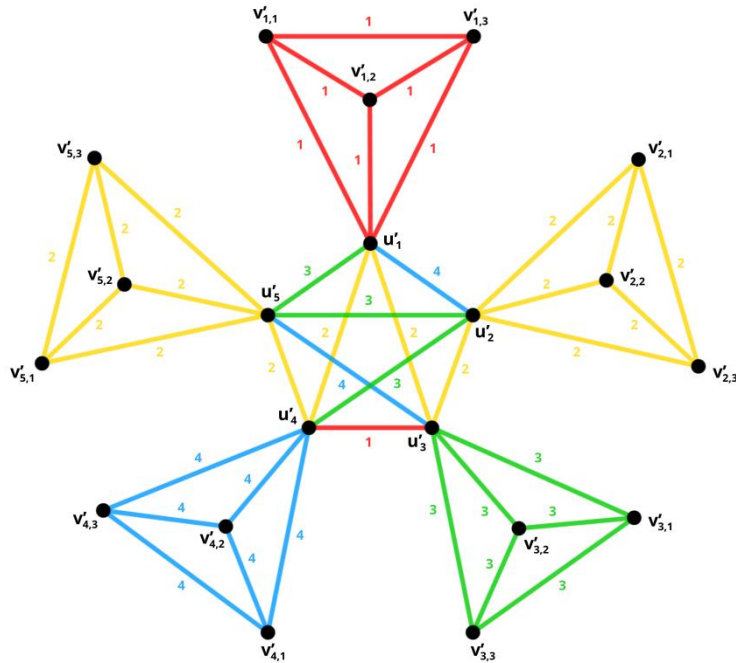


Gambar 1. Pewarnaan pelangi $L(S_{3,3})$

Subkasus 2. $r \geq 5, diam = 3$

Berdasarkan graf pada Gambar 2, untuk membuat graf tersebut terhubung pelangi dengan jumlah warna paling minimum, semua sisi $v'_{i,j} u'_i$ harus diberi warna yang berbeda sebanyak r . Misalkan $rc(L(S_{3,r})) = r$ untuk $r \geq 5$. Selanjutnya, akan dibuktikan

dengan kontradiksi bahwa $rc(L(S_{3,r})) = r - 1$. Andaikan $rc(L(S_{3,r})) = r - 1$, maka terdapat c warna yang merupakan suatu pewarnaan pelangi $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, r - 1\}$, seperti yang diilustrasikan pada Gambar 3 berikut :

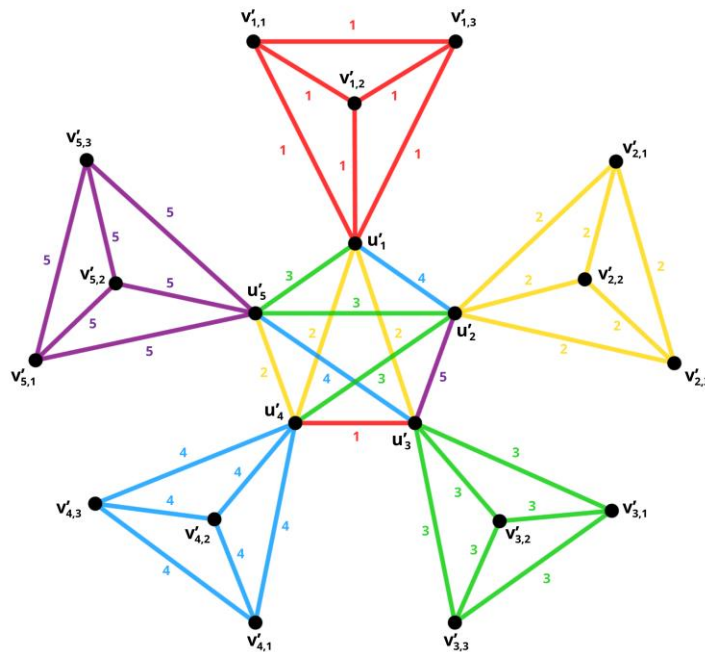


Gambar 2. Pewarnaan pelangi $L(S_{3,5})$ dengan 4 warna

Perhatikan apabila sisi $v'_i v'_j$ diberikan warna $1, 2, 3, \dots, r - 1$, maka akan ada sisi $v'_{i,j} u'_i$ yang memiliki warna sama dengan $v'_{i,j} u'_i$ lainnya. Hal ini menyebabkan suatu lintasan $v'_{i,k} - v'_{j,k}$ pada graf $L(S_{3,r})$ tidak pelangi. Oleh karena graf $L(S_{3,r})$ tidak dapat diwarnai dengan $r - 1$ warna, maka pengandaian tersebut salah, dan terbukti bahwa $rc(L(S_{3,r})) = r$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $rc(L(S_{3,r})) = r$ dengan definisi pewarnaan pelangi c sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 c(u'_i u'_{i+1}) &= \begin{cases} i + \frac{r+1}{2} & i \in \left[\frac{r+1}{2}, r - 1\right] \\ i - \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor & i \in \left[1, \frac{r-1}{2}\right] \end{cases} \\
 c(u'_i v'_{i,j}) &= i & i \in [1, r], j \in [1, 3] \\
 c(u'_i u'_{i+l}) &= i + 1 & i \in [1, r - 3], l \in [2, r - i - 1] \\
 c(u'_i u'_r) &= i + 1 & i \in [2, r - 2] \\
 c(v'_{i,j} v'_{i,j+1}) &= i & i \in [1, r], j \in [1, 2] \\
 c(v'_{i,1} v'_{i,3}) &= i & i \in [1, r] \\
 c(u'_r u'_1) &= \frac{r+1}{2}
 \end{aligned}$$

Berikut merupakan ilustrasi pewarnaan pelangi pada graf $L(S_{3,r})$ untuk r ganjil dengan ≥ 5 :



Gambar 3. Pewarnaan Pelangi $L(S_{3,5})$

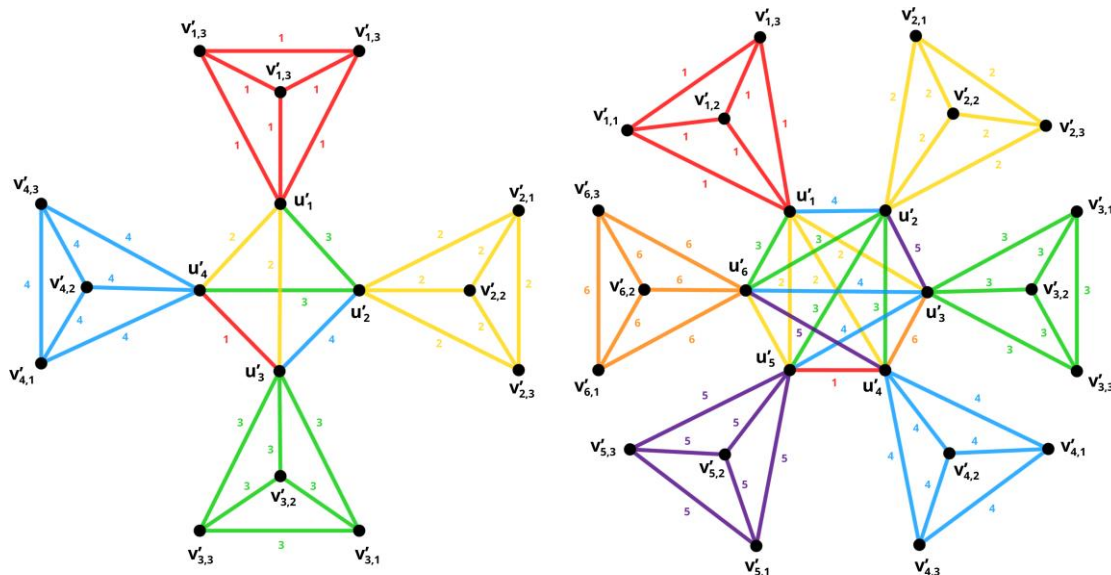
Kasus 1. r genap

Pada kasus r genap, dilakukan analisis pewarnaan pelangi untuk menentukan jumlah minimum warna yang diperlukan agar graf $L(S_{3,r})$ dengan diameter 3 tetap terhubung pelangi. Sama seperti pada kasus r ganjil, sisi-sisi $v'_{i,j}u'_i$ harus diberikan warna berbeda sebanyak $3r$ untuk membuat graf tersebut tetap terhubung pelangi. Selanjutnya, akan ditunjukkan dengan kontradiksi bahwa $rc(L(S_{3,r})) \neq r - 1$. Andaikan $rc(L(S_{3,r})) = 3r - 1$, maka terdapat c warna yang merupakan suatu pewarnaan pelangi $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, 3r - 1\}$. Namun, jika sisi-sisi $v'_{i,j}u'_i$ diberikan warna $1, 2, 3, \dots, r - 1$, maka akan terdapat dua sisi $v'_{i,j}u'_i$ yang memiliki warna sama. Hal ini menyebabkan suatu lintasan $v'_{i,j} - v'_{j,k}$ pada graf $L(S_{3,r})$ tidak pelangi. Oleh karena itu, graf $L(S_{3,r})$ tidak dapat diwarnai dengan $3r - 1$ warna, sehingga pengandaian tersebut salah. Dengan demikian, terbukti bahwa $rc(L(S_{3,r})) = r$. Tanpa mengurangi keumuman, pewarnaan pelangi dari graf $L(S_{3,r})$ pada kasus ini didefinisikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 c(u'_i u'_{i+1}) &= \begin{cases} i + \frac{r}{2} & i \in [1, \frac{r}{2}] \\ i - \frac{r}{2} & i \in [\frac{r}{2} + 1, r - 1] \end{cases} \\
 c(u'_i v'_{i,j}) &= i & i \in [1, r], j \in [1, 3] \\
 c(u'_i u'_{i+l}) &= i + 1 & i \in [1, r - 3], l \in [2, r - i - 1]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c(u'_i u'_r) &= i + 1 & i \in [2, r - 2] \\
 c(v'_{i,j} v'_{i,j+1}) &= i & i \in [1, r], j \in [1, 2] \\
 c(v'_{i,1} v'_{i,3}) &= i & i \in [1, r] \\
 c(u'_r u'_1) &= \frac{r}{2}
 \end{aligned}$$

Berikut merupakan ilustrasi pewarnaan pelangi pada graf $L(S_{3,r})$ untuk r genap dengan ≥ 4 :



Gambar 4. Pewarnaan pelangi $L(S_{3,4})$ dan $L(S_{3,6})$

Berdasarkan pewarnaan pada r ganjil dan r genap, dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap dua titik x dan y pada titik u'_i dan $v'_{i,j}$ dengan $i = [1, r]$ dan $j = [1, 3]$, dimana $x, y \in E(L(S_{3,4}))$ terdapat lintasan pelangi dengan pewarnaan c pada sisi-sisinya sesuai dengan kondisi yang ditunjukkan pada Tabel 1 berikut :

Tabel 1. Lintasan Pelangi Graf $L(S_{3,r})$

No	x	y	Kondisi	Lintasan Pelangi
1.	u'_i	$v'_{j,k}$	$i = [1, r], j = i + l,$ $l = [1, r - i], k = [1, 3]$	$u'_i, u'_j, v'_{j,k}$
	$v'_{i,k}$	u'_j	$i = [1, r], j = i + l,$ $l = [1, r - i], k = [1, 3]$	$v'_{i,k}, u'_i, u'_j$
2.	$v'_{i,k}$	$v'_{j,k}$	$i = [1, r], j = i + l,$ $l = [1, r - i], k = [1, 3]$	$v'_{i,k}, u'_i, u'_j, v'_{j,k}$

Berdasarkan definisi pewarnaan pelangi dan lintasan pelangi pada Tabel 1 maka Teorema 2 yang menyatakan $rc(L(S_{3,r})) = r$ untuk r ganjil dan r genap dengan $r \geq 3$ terbukti.

4. SIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, dapat disimpulkan diperoleh bilangan terhubung pelangi pada graf garis $L(G)$ dari graf ilalang $(S_{3,r})$ untuk $r \geq 3$ dengan r merupakan bilangan bulat dan $G \cong L(S_{3,r})$, maka $rc(L(S_{3,r})) = r$.

5. REKOMENDASI

Penelitian ini dapat diperluas dengan mengeksplorasi bilangan terhubung pelangi antiajaib dan bilangan terhubung titik pelangi pada hasil pembentukan graf yang sama. Selain itu, penelitian juga dapat dikembangkan dengan menggunakan berbagai bentuk pengembangan graf lainnya, seperti graf kuadratik, graf total $(T(G))$, graf central $(C(G))$.

6. REFERENSI

- Bella, G., Yundari, Y., Fransiskus, F., & Vilgalita. (2020). Bilangan Terhubung Titik Pelangi Pada Graf Kuadratik Dan Graf Garis Dari Graf Kembang Api. *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika Dan Terapannya*, 9(2), 343–350. <https://doi.org/10.26418/bbimst.v9i2.40221>
- Chartrand, G., Kalamazoo, Johns, G. L., Valley, S., Mckee, K. A., London, N., Zhang, P., & Kalamazoo. (2008). Rainbow connection in graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*.
- Diestel, R. (2024). *Graph theory*. Springer (print edition).
- Dwi Mawarni Syah, A., & Budayasa, I. K. (2021). Bilangan Keterhubungan Pelangi Graf “Snark” Bunga. *MATHunesa Junal Ilmiah Matematika*, 09 (Keterhubungan Pelangi), 1–7. <https://doi.org/https://doi.org/10.25077/jmua.11.2.112-123.2022>
- Firman, F., Dafik, D., & Albirri, E. R. (2022). Rainbow Vertex Connection Number pada Keluarga Graf Roda. *Cgant Journal of Mathematics and Applications*, 3(1), 1–10. <https://doi.org/10.25037/cgantjma.v3i1.71>
- Harris, J. M., Hirst, J. L., & Mossinghoof, M. J. (2008). Combinatorics and Graph Theory Second Edition. In *Linear Algebra and Its Applications* (Vol. 46, Issue C). Springer. [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(82\)90020-9](https://doi.org/10.1016/0024-3795(82)90020-9)
- Humolungo, K. N., Ismail, S., Hasan, I. K., & Yahya, N. I. (2022). Bilangan Terhubung Pelangi pada Graf Hasil Operasi Korona Graf Antiprisma (APm) dan Graf Lengkap (K4). *Jurnal Matematika UNAND*, 11(2), 112. <https://doi.org/10.25077/jmua.11.2.112-123.2022>
- Khairiah, A., Noviani, E., & Fran, F. (2020). Dimensi Partisi Pada Graf. *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika Dan Terapannya*, 9(1), 189–194. <https://doi.org/10.26418/bbimst.v9i1.38818>
- Pramitasari, E. A., Jember, U., Prihandini, R. M., Jember, U., Makhfudloh, I. I., Jember, U., Agatha, A. B., & Jember, U. (2024). *Application of Graph Coloring in the Placement of Co-Ed Boarding Rooms on Java Street*. June.
- Rahmawati, D., Helmi, H., & Fransiskus, F. (2020). Bilangan Terhubung Total Pelangi Pada Graf Garis Dan Double Graf Garis Dari Graf Sikat. *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika Dan Terapannya*, 9(2), 319–328. <https://doi.org/10.26418/bbimst.v9i2.39947>
- Sari, H. N. F. (2023). *Bilangan r-Kromatik dari Pewarnaan Titik r-Dinamis pada Graf Garis*.
- Tadjuddin, N. F. (2025). Local Metric Dimension of The Line Graph of A Generalized Petersen

Graph. *Proximal: Jurnal Penelitian Matematika dan Pendidikan Matematika*, 8(1).
<https://doi.org/10.18860/ca.v4i3.3694>