

Analisis kestabilan global dan analisis sensitivitas pada model matematika penyebaran penyakit gondongan

Ratna Widayati^{1*}, Ramya Rachmawati¹, Nur Afandi¹

¹ Matematika, FMIPA, Universitas Bengkulu, Bengkulu

rwidayati@unib.ac.id

Diterima: 13-05-2025; Direvisi: 02-06-2025; Dipublikasi: 12-06-2025

Abstract

Mumps is a contagious viral disease transmitted through respiratory droplets and close contact. It can cause symptoms like fever and salivary gland swelling. Despite the MMR vaccine, which offers partial protection, outbreaks persist, especially in college-aged individuals. Epidemiological models can aid in identifying effective prevention strategies for controlling mumps transmission. This paper proposes a mathematical model for mumps spread, considering quarantined individuals and complications. A global stability analysis of the mumps transmission model was performed, considering mortality and quarantine subpopulation. The Disease Free Equilibrium and Endemic Equilibrium Point are globally stable, confirmed by Lyapunov functions. Sensitivity analysis of the basic reproduction number shows that reducing birth rates and contact between infected and susceptible individuals effectively minimizes the infected population. However, increasing the natural death rate can reduce the total population, which may lower infections, but poses potential social and economic challenges for decision-makers.

Keywords: global stability; mumps; sensitivity analysis;

Abstrak

Gondongan adalah penyakit menular yang disebabkan oleh virus, yang ditularkan melalui tetesan pernapasan dan kontak dekat. Penyakit ini dapat menyebabkan gejala seperti demam dan pembengkakan kelenjar ludah. Meskipun vaksin MMR (Measles, Mumps, Rubella) memberikan perlindungan sebagian, wabah gondongan masih terjadi, terutama pada individu usia perguruan tinggi. Model epidemiologi dapat membantu mengidentifikasi strategi pencegahan yang efektif untuk mengendalikan penularan gondongan. Penelitian ini mengusulkan sebuah model matematika untuk penyebaran gondongan dengan mempertimbangkan individu yang dikarantina dan komplikasi penyakit. Analisis stabilitas global dari model penularan gondongan dilakukan dengan memperhitungkan angka kematian dan subpopulasi yang dikarantina. Titik Keseimbangan Bebas Penyakit dan Titik Keseimbangan Endemik terbukti stabil secara global, yang dikonfirmasi melalui fungsi Lyapunov. Analisis sensitivitas terhadap angka reproduksi dasar menunjukkan bahwa pengurangan angka kelahiran dan kontak antara individu yang terinfeksi dan yang rentan dapat secara efektif menurunkan jumlah populasi yang terinfeksi. Namun, peningkatan angka kematian alami memang dapat menurunkan jumlah infeksi dengan mengurangi total populasi, tetapi hal ini juga menimbulkan tantangan sosial dan ekonomi bagi para pembuat kebijakan.

Kata Kunci: kestabilan global; gondongan; analisis sensitivitas;

1. PENDAHULUAN

Gondongan (parotitis epidemik) adalah penyakit menular yang disebabkan oleh virus RNA untai tunggal negatif dari famili *Paramyxoviridae*, yang menginfeksi kelenjar parotis (Bai et al., 2021; Pomeroy et al., 2023). Penularannya sangat mudah melalui

udara, terutama lewat sekresi saluran pernapasan, kontak langsung dengan orang terinfeksi, atau benda yang terkontaminasi (Kibonge & Edward, 2023; Nisar et al., 2023). Virus dapat menyebar saat batuk, bersin, berbicara, atau melalui penggunaan barang bersama seperti botol minum, serta aktivitas kontak dekat seperti berciuman atau berolahraga (Duru & Anyanwu, 2023). Gejala khas gondongan meliputi demam, ketidaknyamanan umum, dan pembengkakan kelenjar ludah, yang biasanya muncul setelah masa inkubasi 15–24 hari (Kibonge & Edward, 2023; Pomeroy et al., 2023).

Gondongan memiliki dampak yang cukup besar secara global. Di Tiongkok, Kota Xiamen mencatat angka kejadian tertinggi di Provinsi Fujian dengan rata-rata 21,1 kasus per 100.000 penduduk selama 2005–2017, mendekati rata-rata nasional (Huang et al., 2022). Penyakit ini mudah menyebar selama musim dingin dan awal musim semi, dengan lebih dari 300.000 anak muda terdiagnosis setiap tahunnya (Bai et al., 2021). Di Amerika Serikat, terjadi wabah lintas negara pada 2006 dengan 6.584 kasus, sedangkan di Inggris dan Wales tercatat 16.436 kasus pada 2004, keduanya terutama terjadi pada dewasa muda di perguruan tinggi (Kibonge & Edward, 2023). Gondongan juga dapat menyebabkan komplikasi serius seperti orkitis, ooforitis, pankreatitis, ensefalitis, meningitis, dan kehilangan pendengaran (Azimaqin et al., 2022; Nisar et al., 2023). Di Jepang, vaksin gondongan dilaporkan dapat menyebabkan meningitis aseptik pada kisaran 1 kasus per 403 hingga 1.375 vaksinasi (Hoshi et al., 2022). Meski demikian, infeksi ini umumnya memberikan kekebalan seumur hidup (Widayati et al., 2023).

Pencegahan gondongan paling efektif dilakukan melalui vaksin MMR, yang melindungi dari campak, gondongan, dan rubella. Meski vaksin ini telah diterapkan secara luas dalam dua dosis, efektivitasnya menurun seiring waktu, terutama pada dewasa muda seperti mahasiswa, sehingga mereka tetap berisiko tertular (Azimaqin et al., 2022; Bai et al., 2021). Selain itu, beberapa negara seperti Jepang tidak menyertakan vaksin MMR dalam program nasional. Oleh karena itu, diperlukan strategi tambahan seperti penggunaan model epidemiologi untuk mengidentifikasi langkah pencegahan yang lebih efektif.

Sejumlah studi telah mengembangkan model dinamis untuk memahami dan mengendalikan penularan gondongan. Bai et al., (2021) menunjukkan bahwa tindakan karantina efektif mengendalikan penyebaran melalui analisis stabilitas menggunakan Teorema LaSalle. Azimaqin et al., (2022) dan Hoshi et al., (2022) menyoroti pengaruh faktor usia, musim, demografi, dan kegagalan vaksin dalam penyebaran gondongan dengan pendekatan pemodelan berbasis usia. Nisar et al., (2023) mengeksplorasi dampak *white noise* dan variasi spasial-temporal terhadap gangguan pendengaran akibat gondongan. Sementara itu, Duru & Anyanwu, (2023), Kibonge & Edward, (2023), serta (Miswanto et al., 2024) menekankan efektivitas strategi seperti vaksinasi dua dosis, karantina, edukasi, isolasi, dan pengobatan sebagai kombinasi kontrol optimal

dalam mengurangi dan mengeliminasi penyebaran gondongan. Berbagai model SIQR telah dikembangkan untuk menganalisis dinamika penyakit menular dan efektivitas strategi pengendalian. Li & Guo, (2022) menunjukkan bahwa *white noise* tinggi dapat menekan wabah pada model stokastik SIQR dengan insidensi jenuh dan vaksinasi. Wang et al., (2023) mengembangkan model SIQR dengan insidensi umum, vaksinasi, dan pengobatan, serta menunjukkan efektivitasnya melalui data COVID-19 di Rusia dan Serbia. Yadav et al., (2023) menyoroti adanya bifurkasi mundur dalam model deterministik SIQR, di mana penyakit tetap bertahan meskipun angka reproduksi dasar di bawah satu. Badole et al., (2024) menganalisis model dengan strategi vaksinasi, eliminasi, dan karantina, dan menunjukkan bahwa titik keseimbangan bebas penyakit menjadi tidak stabil saat ambang batas terlampaui. Model lain juga turut dikaji. Zhu et al., (2022) meneliti penyebaran rumor menggunakan kontrol diskontinu, sedangkan Barua & Dénes, (2023) menyusun model SIRS untuk virus Nipah dengan fokus pada zoonosis dan kehilangan imunitas. Song & Niu, (2024) mengusulkan model SI Lotka-Volterra dalam lingkungan periodik, yang menunjukkan kemungkinan solusi waktu-periodik yang stabil. Berhe et al., (2024) memodelkan dinamika COVID-19 di Ethiopia dan menekankan efektivitas kombinasi vaksinasi, edukasi, dan pengobatan dalam menekan penyebaran penyakit.

Berdasarkan penelitian-penelitian di atas, untuk menyelidiki dampak dari individu yang dikarantina serta kemungkinan kematian akibat gondongan yang disebabkan oleh komplikasi penyakit yang lebih serius, kami mengusulkan sebuah model matematika penyebaran gondongan yang mencakup kelas subpopulasi individu yang dikarantina, baik di rumah sakit maupun di rumah, setelah terinfeksi gondongan. Artikel ini merupakan kelanjutan dari makalah berjudul "Stability Analysis for the Spread of Mumps Based on the SIQR Model" (Widayati et al., 2023), yang sebelumnya hanya meneliti stabilitas lokal melalui analisis nilai eigen. Kebaruan utama dari studi ini terletak pada analisis stabilitas global pada kedua titik ekuilibrium serta analisis sensitivitas terhadap angka reproduksi dasar. Analisis stabilitas global dilakukan dengan menggunakan fungsi Lyapunov secara lebih mendalam. Selain itu, analisis sensitivitas terhadap angka reproduksi dasar diperlukan untuk mengidentifikasi parameter-parameter yang paling berpengaruh terhadap sifat stabilitas, karena angka reproduksi dasar merupakan faktor pengendali utama dalam mengkaji karakteristik stabilitas dari sistem.

2. METODE PELAKSANAAN

Penelitian ini merupakan studi literatur terapan. Studi-studi sebelumnya ditinjau untuk memberikan pertimbangan terhadap asumsi-asumsi yang diperkenalkan dalam model. Asumsi-asumsi ini digunakan untuk menyederhanakan model, namun tetap dirancang agar mendekati kondisi nyata secara akurat. Objek kajian dalam penelitian ini melibatkan subpopulasi individu yang rentan terhadap penyakit gondongan, subpopulasi individu yang terinfeksi gondongan, subpopulasi individu yang dikarantina

akibat gondongan dan subpopulasi individu yang telah sembuh dari gondongan serta hubungan antar-subpopulasi tersebut.

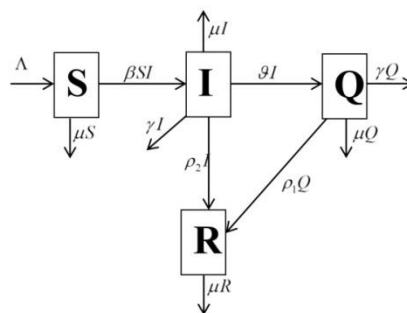
Penelitian ini diawali dengan pengumpulan informasi terkait model-model penyebaran penyakit gondongan yang dikembangkan dalam berbagai studi terbaru. Model yang diperoleh kemudian dianalisis lebih lanjut melalui analisis stabilitas global dengan menggunakan pendekatan fungsi Lyapunov, guna mengevaluasi kestabilan global sistem dalam model matematika. Setelah itu, dilakukan analisis sensitivitas terhadap parameter-parameter yang memengaruhi nilai angka reproduksi dasar (*basic reproduction number*). Analisis ini bertujuan untuk mengetahui sejauh mana perubahan nilai parameter memengaruhi dinamika penyebaran penyakit. Selanjutnya, dilakukan simulasi numerik terhadap model, yang mencakup pula analisis sensitivitas yang telah dilakukan, untuk mengamati perilaku sistem secara kuantitatif di bawah berbagai variasi kondisi parameter. Tahap akhir dari penelitian ini adalah interpretasi terhadap hasil-hasil analisis yang telah dilakukan. Interpretasi ini memberikan pemahaman yang lebih mendalam mengenai dinamika penyebaran penyakit gondongan, serta implikasi dari pengaruh parameter-parameter kunci terhadap stabilitas dan penyebaran penyakit dalam populasi.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Model yang digunakan dalam penelitian ini memiliki beberapa keterbatasan. Asumsi homogenitas populasi dan parameter yang bersifat konstan tidak sepenuhnya mencerminkan kondisi nyata di lapangan. Selain itu, model ini belum mempertimbangkan aspek spasial, jaringan sosial, serta variasi stokastik dalam penularan penyakit.

3.1 Formulasi Model

Populasi diklasifikasikan ke dalam empat kompartemen, yaitu S : subpopulasi individu yang rentan terhadap penyakit gondongan, I : subpopulasi individu yang terinfeksi gondongan, Q : subpopulasi individu yang dikarantina akibat gondongan, dan R : subpopulasi individu yang telah sembuh dari gondongan. Berikut ini disajikan diagram transfer keempat kompartemen tersebut.



Gambar 1. Diagram Transfer Kompartemen pada Penyebaran Gondongan

Berdasarkan Gambar 1, diperoleh model dinamis untuk penyebaran penyakit gondongan sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta SI - \mu S \quad (1a)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \rho_2 I - \vartheta I - \gamma I - \mu I \quad (1b)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \vartheta I - \rho_1 Q - \gamma Q - \mu Q \quad (1c)$$

$$\frac{dR}{dt} = \rho_1 Q + \rho_2 I - \mu R. \quad (1d)$$

Diasumsikan bahwa semua parameter dalam Sistem (1) bernilai positif. Misalkan Λ menyatakan laju kelahiran, μ laju kematian alami, β menunjukkan laju penularan, ϑ laju karantina, γ menunjukkan laju kematian akibat penyakit gondongan, dan ρ_1 dan ρ_2 melambangkan laju kesembuhan individu yang dikarantina maupun yang terinfeksi.

Pada bagian berikutnya, kami akan menganalisis sifat global dari titik-titik kesetimbangan Sistem (1) dengan menggunakan metode fungsi Lyapunov. Telah jelas bahwa Sistem (1) memiliki titik ekuilibrium bebas penyakit $X_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0\right)$ dengan $S_0 = \frac{\Lambda}{\mu}$ dan titik ekuilibrium endemik $X^* = (S^*, I^*, Q^*, R^*)$ dengan $S^* = \left(\frac{\rho_2 + \mu + \gamma + \vartheta}{\beta}\right)$, $I^* = \left(\frac{\Lambda - \mu S^*}{\beta S^*}\right)$, $Q^* = \left(\frac{\vartheta(\Lambda - \mu S^*)}{\beta(\mu + \gamma + \rho_1)S^*}\right)$, $R^* = \left(\frac{I^*}{\mu}\right)\left(\rho_2 + \frac{\rho_1 \vartheta}{\mu + \gamma + \rho_1}\right)$ yang keduanya telah dibuktikan eksistensinya. Selanjutnya, Sistem (1) memiliki *Basic Reproduction Number* ($\mathcal{R}_0$) yaitu

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta \Lambda}{\mu(\gamma + \rho_2 + \mu + \vartheta)}$$

yang telah ditentukan dengan menggunakan teknik *Next Generation Matrix* (NGM).

3.2 Analisis Kestabilan Global Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Pada bagian ini akan dibahas mengenai kestabilan global dari titik ekuilibrium bebas penyakit X_0 melalui teorema di bawah ini.

Teorema 1. *Jika $\mathcal{R}_0 \leq 1$ maka titik ekuilibrium X_0 stabil asimtotik global.*

Bukti. Didefinisikan suatu fungsi $V: \mathbb{R}_+^4 \rightarrow \mathbb{R}$

$$V(x) = I.$$

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $(\hat{S}, \hat{I}, \hat{Q}, \hat{R}) \in \mathbb{R}_+^4$, terdapat $\delta < \varepsilon$, sehingga untuk setiap $x = (S, I, Q, R) \in \mathbb{R}_+^4$ diperoleh

$$\|(S, I, Q, R) - (\hat{S}, \hat{I}, \hat{Q}, \hat{R})\| < \delta$$

$$\|S - \hat{S}, I - \hat{I}, Q - \hat{Q}, R - \hat{R}\| < \delta$$

$$\sqrt{|S - \hat{S}|^2 + |I - \hat{I}|^2 + |Q - \hat{Q}|^2 + |R - \hat{R}|^2} < \delta.$$

Akibatnya

$$|S - \hat{S}| < \delta, |I - \hat{I}| < \delta, |Q - \hat{Q}| < \delta, |R - \hat{R}| < \delta.$$

Lebih lanjut

$$|V(S, I, Q, R) - V(\hat{S}, \hat{I}, \hat{Q}, \hat{R})| = |I - \hat{I}|$$

$$< \delta$$

$$< \varepsilon.$$

Jadi, V merupakan fungsi kontinu. Kemudian dapat dengan mudah dilihat bahwa turunan parsial dari V merupakan fungsi yang kontinu. Oleh karena itu, jika $x = 0$ maka $V(x) = 0$, jika $x \rightarrow \infty$ maka $V \rightarrow \infty$, dan $x \geq 0$ sehingga $V(x) = I \geq 0$ untuk semua $x \in \mathbb{R}_+^4$. Lebih lanjut, turunan dari V untuk $t > 0$ dapat dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial I} \left(\frac{dI}{dt} \right) \\ &= \frac{dI}{dt} \\ &= (\beta S - \rho_2 - \vartheta - \gamma - \mu)I \\ &\leq \left(\beta \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) - (\rho_2 + \vartheta + \gamma + \mu) \right) I \\ &= \left(\frac{\beta \Lambda}{\mu(\rho_2 + \vartheta + \gamma + \mu)} - \frac{(\rho_2 + \vartheta + \gamma + \mu)}{(\rho_2 + \vartheta + \gamma + \mu)} \right) (\rho_2 + \vartheta + \gamma + \mu) I \\ &= (\mathcal{R}_0 - 1)(\rho_2 + \vartheta + \gamma + \mu) I \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Berdasarkan hal tersebut, V merupakan fungsi Lyapunov. Kemudian kestabilan global dari titik ekuilibrium bebas penyakit Sistem (1) dapat dilihat dari

$$\dot{V}(X_0) = 0.$$

Jadi, sifat kestabilan dari titik ekuilibrium bebas penyakit adalah stabil asimtotik global. ■

3.3 Analisis Kestabilan Global Titik Ekuilibrium Endemik

Pada bagian ini akan dibahas mengenai kestabilan global titik ekuilibrium endemik X^* melalui teorema berikut ini.

Teorema 2. *Jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka titik ekuilibrium X^* stabil asimtotik global.*

Bukti. Didefinisikan suatu fungsi $W: \mathbb{R}_+^4 \rightarrow \mathbb{R}$

$$W(x) = \frac{1}{2}((S - S^*) + (I - I^*) + (Q - Q^*) + (R - R^*))^2.$$

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $\hat{x} = (\hat{S}, \hat{I}, \hat{Q}, \hat{R}) \in \mathbb{R}_+^4$, terdapat

$$0 < \varphi \leq \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{2(1+2|\hat{S}|+1+2|\hat{I}|+1+2|\hat{Q}|+1+2|\hat{R}|+2|S^*+I^*+Q^*+R^*|)} \right\}.$$

sehingga untuk setiap $x = (S, I, Q, R) \in \mathbb{R}_+^4$ diperoleh

$$\begin{aligned} |W(x) - W(\hat{x})| &= \left| \frac{1}{2} \left((\hat{S} - S^*) + (\hat{I} - I^*) + (\hat{Q} - Q^*) + (\hat{R} - R^*) \right)^2 - \frac{1}{2} \left((\hat{S} - S^*) + (\hat{I} - I^*) + (\hat{Q} - Q^*) + (\hat{R} - R^*) \right)^2 \right| \\ &= \frac{1}{2} |S + \hat{S} - 2S^* + I + \hat{I} - 2I^* + Q + \hat{Q} - 2Q^* + R + \hat{R} - 2R^*| |S - \hat{S} + I - \hat{I} + Q - \hat{Q} + R - \hat{R}| \\ &\leq \frac{1}{2} |S + \hat{S} - 2S^* + I + \hat{I} - 2I^* + Q + \hat{Q} - 2Q^* + R + \hat{R} - 2R^*| (|S - \hat{S}| + |I - \hat{I}| + |Q - \hat{Q}| + |R - \hat{R}|) \\ &\leq \frac{1}{2} |S + \hat{S} - 2S^* + I + \hat{I} - 2I^* + Q + \hat{Q} - 2Q^* + R + \hat{R} - 2R^*| \|x - \hat{x}\| \\ &< 2 \left((1+2|\hat{S}|+1+2|\hat{I}|+1+2|\hat{Q}|+1+2|\hat{R}|) + |S^*+I^*+Q^*+R^*| \right) \|x - \hat{x}\| \\ &< 2 \left((1+2|\hat{S}|+1+2|\hat{I}|+1+2|\hat{Q}|+1+2|\hat{R}|) + |S^*+I^*+Q^*+R^*| \right) \varphi \\ &< 2 \left((1+2|\hat{S}|+1+2|\hat{I}|+1+2|\hat{Q}|+1+2|\hat{R}|) + |S^*+I^*+Q^*+R^*| \right) \left(\frac{\varepsilon}{2(1+2|\hat{S}|+1+2|\hat{I}|+1+2|\hat{Q}|+1+2|\hat{R}|+2|S^*+I^*+Q^*+R^*|)} \right) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Jadi, W merupakan fungsi kontinu. Kemudian turunan parsial dari W

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial S} &= (S - S^*) + (I - I^*) + (Q - Q^*) + (R - R^*) \\ &= (S + I + Q + R) - (S^* + I^* + Q^* + R^*) \end{aligned}$$

merupakan fungsi kontinu. Satu-satunya titik minimum dari fungsi tersebut terletak di titik ekuilibrium endemik. Ini berarti bahwa fungsi tersebut positif definit karena $x = (S, I, Q, R) \geq 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}_+^4$. Lebih lanjut, turunan dari W terhadap $t > 0$ dapat dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} \dot{W} &= ((S - S^*) + (I - I^*) + (Q - Q^*) + (R - R^*)) \frac{d}{dt} (S + I + Q + R) \\ &= ((S + I + Q + R) - (S^* + I^* + Q^* + R^*)) \frac{d}{dt} N(t) \\ &= (N(t) - (S^* + I^* + Q^* + R^*)) \frac{d}{dt} N(t) \\ &= \left(N(t) - \frac{\Lambda}{\mu} \right) (\Lambda - \mu N(t)) \\ &= - \left(\frac{\Lambda}{\mu} - N(t) \right) (\Lambda - \mu N(t)) \\ &= - \frac{1}{\mu} (\Lambda - \mu N(t))^2 \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Berdasarkan hal tersebut, W merupakan fungsi Lyapunov. Oleh karena itu, jika $x \rightarrow \infty$ maka $W \rightarrow \infty$. Kemudian kestabilan global Sistem (1) pada titik ekuilibrium endemik dapat ditentukan dari

$$\begin{aligned} \dot{W}(X^*) &= ((S - S^*) + (I - I^*) + (Q - Q^*) + (R - R^*)) \frac{d}{dt} (S + I + Q + R) \\ &= 0 \end{aligned}$$

untuk semua $x = (S, I, Q, R) \in \mathbb{R}_+^4$. Jadi, titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik global. ■

3.4 Analisis Sensitivitas *Basic Reproduction Number*

Tujuan dari analisis sensitivitas terhadap *Basic Reproduction Number* adalah untuk mengidentifikasi parameter-parameter yang memiliki dampak paling signifikan terhadap kestabilan dan dinamika sistem. Dengan memahami faktor-faktor yang paling memengaruhi *Basic Reproduction Number*, dapat dilakukan prioritas intervensi dan optimalitas langkah-langkah pengendalian untuk secara efektif mengelola penyebaran penyakit. Analisis ini membantu dalam menentukan variabel-variabel kunci yang perlu ditargetkan untuk mencapai hasil yang diinginkan dalam pengendalian penyakit. Analisis sensitivitas lokal dilakukan dengan menggunakan definisi berikut.

Definisi 1. Indeks sensitivitas ternormalisasi diperoleh dari turunan indeks sensitivitas ternormalisasi dari variabel terhadap parameter, yang didefinisikan sebagai berikut

$$C_p^M = \frac{\partial M}{\partial p} \times \frac{p}{M}$$

dengan M merupakan variabel yang akan dianalisis dan p merupakan parameter.

Definisi 1 menyatakan bahwa indeks sensitivitas diperoleh melalui konsep laju perubahan dan dengan mengukur sejauh mana perubahan tersebut memengaruhi hasil. Semakin tinggi nilai indeks, semakin besar dampak parameter terhadap variabel yang diukur. Berikut ini adalah analisis sensitivitas dari parameter β terhadap *Basic Reproduction Number* $\mathcal{R}_0$.

$$\begin{aligned} C_{\beta}^{\mathcal{R}_0} &= \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \beta} \times \frac{\beta}{\mathcal{R}_0} \\ &= \frac{\Lambda}{\mu(\gamma + \rho_2 + \mu + \vartheta)} \times \frac{\beta\mu(\gamma + \rho_2 + \mu + \vartheta)}{\beta\Lambda} \\ &= 1. \end{aligned}$$

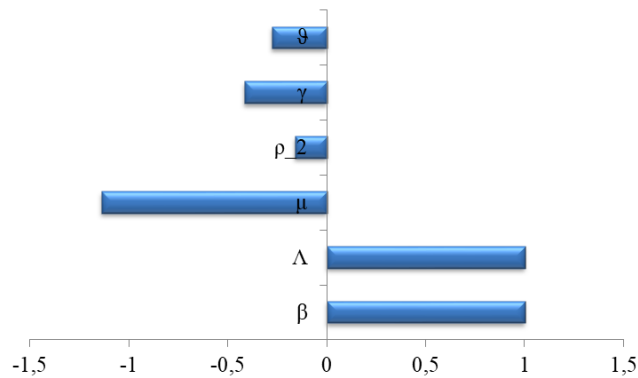
Tabel di bawah ini menyajikan indeks sensitivitas dari parameter-parameter terhadap variabel $\mathcal{R}_0$.

Tabel 1. Indeks sensitivitas dari parameter-parameter

Parameter	Nilai
Λ	1
μ	$-\left(\frac{\vartheta + 2\mu + \rho_2 + \gamma}{\vartheta + \mu + \rho_2 + \gamma}\right)$
β	1
ϑ	$-\left(\frac{\vartheta}{\vartheta + \mu + \rho_2 + \gamma}\right)$
γ	$-\left(\frac{\gamma}{\vartheta + \mu + \rho_2 + \gamma}\right)$

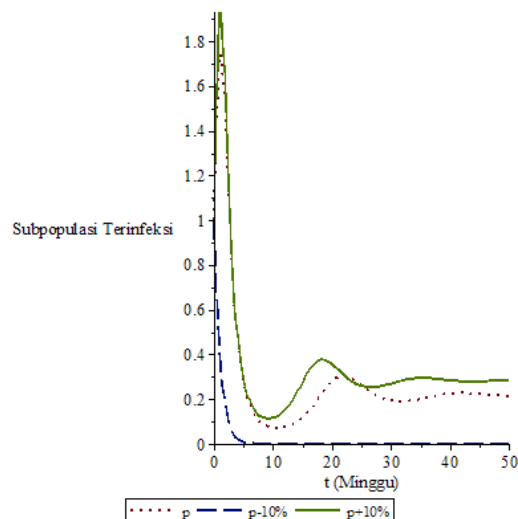
$$\rho_2 - \left(\frac{\rho_2}{\vartheta + \mu + \rho_2 + \gamma} \right)$$

Berdasarkan Tabel 1, parameter-parameter yang memiliki pengaruh terbesar terhadap nilai $\mathcal{R}_0$ adalah β, μ, Λ . Gambar di bawah ini menunjukkan nilai indeks sensitivitas untuk parameter-parameter tersebut.



Gambar 2. Nilai indeks sensitivitas

Nilai positif pada Gambar 1 menunjukkan hubungan langsung antara parameter dan $\mathcal{R}_0$, sementara nilai negatif menunjukkan hubungan terbalik. Ini berarti bahwa tingkat kelahiran, tingkat kematian alami, dan tingkat kontak antara individu terinfeksi dan individu yang rentan memiliki dampak signifikan pada grafik solusi dari sistem persamaan diferensial yang dibentuk dalam masalah ini. Gambar di bawah ini menunjukkan perbedaan ketika parameter-parameter tersebut dinaikkan dan diturunkan sebesar 10% untuk subpopulasi yang terinfeksi.

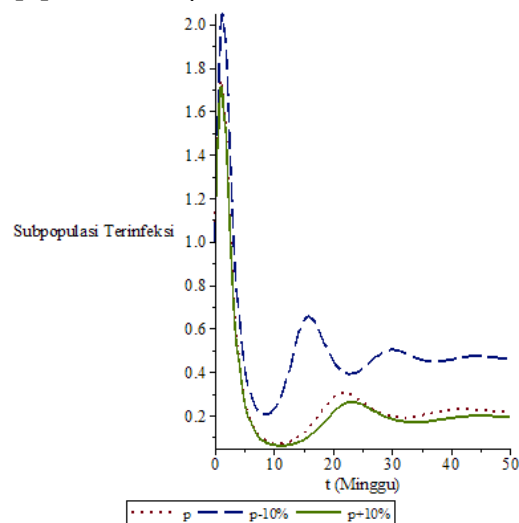


Gambar 3. Grafik Solusi Sistem (1) pada Subpopulasi Terinfeksi dengan nilai β dan Λ yang dinaikkan dan diturunkan

Berdasarkan Gambar 2, penurunan nilai β dan Λ sebesar 10% menghasilkan grafik subpopulasi individu yang terinfeksi mendekati nol, yang berarti bahwa pada suatu

titik, individu yang terinfeksi akan menghilang dari populasi. Sebaliknya, ketika nilai β dan Λ dinaikkan sebesar 10%, grafik subpopulasi individu yang terinfeksi meningkat, yang dapat diartikan bahwa subpopulasi individu yang terinfeksi bertambah seiring dengan kenaikan nilai β dan Λ . Interpretasi dari hasil ini yang dapat dijadikan saran untuk mengendalikan penyebaran penyakit gondongan adalah bahwa jika tujuan pengendalian adalah untuk meminimalkan populasi individu yang terinfeksi, maka pendekatan yang efektif adalah dengan menurunkan tingkat kelahiran dan tingkat kontak antara individu yang terinfeksi dan individu yang rentan.

Selanjutnya, Gambar 3 menunjukkan grafik populasi individu yang terinfeksi ketika variasi dilakukan terhadap parameter μ .



Gambar 4. Grafik Solusi Sistem (1) pada Subpopulasi Terinfeksi dengan nilai μ yang dinaikkan dan diturunkan

Berdasarkan Gambar 3, penurunan nilai μ sebesar 10% menghasilkan subpopulasi individu yang terinfeksi lebih besar. Namun, ketika nilai μ dinaikkan sebesar 10%, populasi individu yang terinfeksi berada di bawah grafik populasi normal saat μ tidak divariasikan. Hal ini menunjukkan bahwa hubungan terbalik antara μ dan $\mathcal{R}_0$ memang valid. Namun demikian, peningkatan μ sebagai tingkat kematian alami menyebabkan total populasi menjadi lebih kecil, yang mungkin bukan merupakan solusi yang tepat bagi para pengambil keputusan, meskipun hal tersebut dapat menurunkan populasi individu yang terinfeksi.

4. SIMPULAN

Analisis kestabilan global dilakukan pada kedua titik ekuilibrium dari model matematika penularan penyakit gondongan, dengan asumsi adanya kematian akibat gondongan dan keberadaan kelas subpopulasi karantina. Titik ekuilibrium bebas penyakit bersifat stabil asimtotik global jika $\mathcal{R}_0 \leq 1$, dengan fungsi Lyapunov $V = I$. Selanjutnya, titik ekuilibrium endemik bersifat stabil asimtotik global jika $\mathcal{R}_0 > 1$, dengan fungsi Lyapunov tertentu.

Analisis sensitivitas terhadap angka reproduksi dasar menunjukkan bahwa jika tujuan pengendalian adalah untuk meminimalkan populasi individu yang terinfeksi, maka pendekatan yang efektif adalah dengan menurunkan tingkat kelahiran dan tingkat kontak antara individu yang terinfeksi dan individu yang rentan. Peningkatan tingkat kematian alami μ menyebabkan total populasi menjadi lebih kecil, yang mungkin mengurangi jumlah individu yang terinfeksi, namun hal ini mungkin bukan merupakan solusi yang sesuai bagi para pengambil keputusan karena potensi dampak sosial atau ekonomi yang ditimbulkan.

5. REKOMENDASI

Berdasarkan hasil analisis kestabilan global dan analisis sensitivitas terhadap angka reproduksi dasar, disarankan agar penelitian ini dilanjutkan ke tahap pengembangan kontrol optimal. Tujuan dari tahap ini adalah untuk merancang strategi pengendalian yang tidak hanya efektif dalam menekan jumlah individu yang terinfeksi, tetapi juga efisien dari sisi biaya dan dampak sosial-ekonomi.

6. REFERENSI

- Azimaqin, N., Peng, Z., Ren, X., Wei, Y., & Liu, X. (2022). Vaccine failure, seasonality and demographic changes associate with mumps outbreaks in Jiangsu Province, China: Age-structured mathematical modelling study. *Journal of Theoretical Biology*, 544, 111125. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2022.111125>
- Badole, M., Bhardwaj, R., Joshi, R., & Konar, P. (2024). Stability analysis of a SIQR epidemic compartmental model with saturated incidence rate, vaccination and elimination strategies. *Results in Control and Optimization*, 16. <https://doi.org/10.1016/j.rico.2024.100459>
- Bai, Y. zhen, Wang, X. jing, & Guo, S. bai. (2021). Global Stability of a Mumps Transmission Model with Quarantine Measure. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 37(4), 665–672. <https://doi.org/10.1007/s10255-021-1035-7>
- Barua, S., & Dénes, A. (2023). Global dynamics of a compartmental model for the spread of Nipah virus. *Heliyon*, 9(9), e19682. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e19682>
- Berhe, H. W., Gebremeskel, A. A., Melese, Z. T., Al-arydah, M., & Gebremichael, A. A. (2024). Modeling and global stability analysis of COVID-19 dynamics with optimal control and cost-effectiveness analysis. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, 11(July), 100843. <https://doi.org/10.1016/j.padiff.2024.100843>
- Duru, E. C., & Anyanwu, M. C. (2023). Mathematical model for the transmission of mumps and its optimal control. *Biometrical Letters*, 60(1), 77–95. <https://doi.org/10.2478/bile-2023-0006>
- Hoshi, S. ling, Okubo, R., Tabuchi, K., Seposo, X., Shono, A., & Kondo, M. (2022). Cost-effectiveness analyses of monovalent mumps vaccination programs for Japanese children. *Vaccine*, 40(37), 5513–5522. <https://doi.org/10.1016/j.vaccine.2022.08.004>
- Huang, J. feng, Zhao, Z. yu, Lu, W. kui, Rui, J., Deng, B., Liu, W. kang, Yang, T. long, Li, Z. yang, Li, P. hua, Liu, C., Luo, L., Zhao, B., Wang, Y. fang, Li, Q., Wang, M. zhai, & Chen, T. (2022). Correlation between mumps and meteorological factors in Xiamen City, China: A modelling study. *Infectious Disease Modelling*, 7(2), 127–137. <https://doi.org/10.1016/j.idm.2022.04.004>
- Kibonge, A., & Edward, S. (2023). Modelling the transmission dynamics of mumps with control measures. *Journal of Mathematical and Computational Science*. <https://doi.org/10.28919/jmcs/7943>
- Li, H., & Guo, X. (2022). Dynamics study of a stochastic SIQR epidemic model with vaccination

- and saturated incidence. *IFAC-PapersOnLine*, 55(3), 79–84. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.05.014>
- Miswanto, M., Biba, F., & Windarto, W. (2024). Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal pada Model Matematika Penyebaran Penyakit Mumps. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, 21(1), 117. <https://doi.org/10.12962/limits.v21i1.20053>
- Nisar, K. S., Srinivas, M. N., Murthy, B. S. N., Madhusudanan, V., Gul, N., Abdulrehman, J., & Zeb, A. (2023). Exploring the dynamics of white noise and spatial temporal variations on hearing loss due to mumps virus. *Results in Physics*, 51(May), 106584. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2023.106584>
- Pomeroy, L. W., Magsi, S., McGill, S., & Wheeler, C. E. (2023). Mumps epidemic dynamics in the United States before vaccination (1923–1932). *Epidemics*, 44(April), 100700. <https://doi.org/10.1016/j.epidem.2023.100700>
- Song, Y., & Niu, L. (2024). Global dynamics of a periodically forced SI disease model of Lotka–Volterra type. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 470(June), 16–18. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2024.134422>
- Wang, K., Fan, H., & Zhu, Y. (2023). Dynamics and application of a generalized SIQR epidemic model with vaccination and treatment. *Applied Mathematical Modelling*, 120, 382–399. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2023.03.036>
- Widayati, R., Nadzifah, N., Fiqiyah, V. F., & Rizkiyani, N. (2023). Stability Analysis for the Spread of Mumps Based on SIQR Model. *Jurnal Matematika, Statistika Dan Komputasi*, 20(1), 24–40. <https://doi.org/10.20956/j.v20i1.27060>
- Yadav, S., Bhadauria, A. S., & Verma, V. S. (2023). Study of an SIQR model with optimal control techniques: A mathematical approach. *Results in Control and Optimization*, 13(May), 100327. <https://doi.org/10.1016/j.rico.2023.100327>
- Zhu, H., Zhang, X., & An, Q. (2022). Global stability of a rumor spreading model with discontinuous control strategies. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 606. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2022.128157>