

Modifikasi Operator *Weighted Backward Shift* untuk Membentuk Operator *Hypercyclic* pada Ruang Barisan

Nur Afand*, Septri Damayanti, Ratna Widayati

Program Studi S1 Matematika, FMIPA, Universitas Bengkulu, Bengkulu

nafandi@unib.ac.id

Abstract

The linear operator $T: X \rightarrow X$ is called an hypercyclic operator if there exist $x \in X$ such that the orbit of x under the operator T is dense in X . This study aims to construct an explicit hypercyclic operator on the sequence space ℓ^p , by modifying the backward shift operator using a non-constant weight sequence. This approach differs from Rolewicz's classical method, which used constant weights. The method applied is constructive and formal, relying on deductive reasoning in mathematical proofs. Two operators—weighted left and right shifts—are introduced and their properties are analyzed, including their composition and iterative behavior. The main result is the construction of a specific operator S_a weighted by $a = (a_n)$ that is proven to be hypercyclic. The proof involves demonstrating the existence of a vector whose orbit under S_a is dense in ℓ^p .

Keywords: hypercyclic; backward shift; ℓ^p ; orbit; dense

Abstrak

Operator linier $T: X \rightarrow X$ adalah operator *hypercyclic* jika terdapat $x \in X$, sehingga orbit dari x di bawah T *dense* (padat) di dalam X . Penelitian ini bertujuan mengonstruksi operator *hypercyclic* secara eksplisit pada ruang barisan ℓ^p , dengan memodifikasi operator *backward shift* menggunakan barisan bobot yang bervariasi. Pendekatan ini berbeda dari metode klasik Rolewicz yang menggunakan bobot konstan. Metode yang digunakan bersifat konstruktif dan formal, memanfaatkan prinsip-prinsip deduktif dalam pembuktian matematika. Dua operator, yaitu operator shift berbobot ke kiri dan ke kanan, diperkenalkan dan dikaji sifat-sifatnya, termasuk hubungan komposisinya dan batas perilaku iteratifnya. Hasil utama dari penelitian ini adalah konstruksi operator S_a dengan bobot $a = (a_n)$ sehingga terbukti merupakan operator *hypercyclic*. Pembuktian dilakukan dengan menunjukkan bahwa terdapat vektor yang orbitnya dibangun oleh S_a *dense* (padat) di dalam ℓ^p .

Kata Kunci: *hypercyclic*; *backward shift*; ℓ^p ; orbit; *dense*

1. PENDAHULUAN

Teori operator *hypercyclic* merupakan salah satu cabang menarik dalam dinamika operator, yang mempelajari perilaku iteratif dari operator linear pada ruang Banach atau Hilbert. Sebuah operator T disebut *hypercyclic* apabila terdapat suatu vektor x dalam ruang sedemikian sehingga orbitnya $\{T^n x : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ *dense* di ruang tersebut. Konsep ini pertama kali diperkenalkan dalam bentuk awal oleh Birkhoff pada tahun 1929 ketika membuktikan bahwa operator translasi pada ruang fungsi holomorf tertentu memiliki vektor dengan orbit rapat. Namun demikian secara formal, operator *hypercyclic* pertama pada ruang Banach dikenalkan oleh Rolewicz (1969), yang memberikan contoh operator *hypercyclic* melalui modifikasi dari operator backward shift.

Sejak itu, penelitian dalam bidang ini berkembang pesat. Salas (1995) yang memberikan karakterisasi tentang operator shift berbobot yang *hypercyclic*, membuka jalan bagi eksplorasi mendalam terhadap kondisi bobot yang menyebabkan operator memiliki dinamika kompleks. Grosse-Erdmann (1999, 2000) kemudian memperluas hasil-hasil ini dengan meneliti keluarga universal dan menjelaskan hubungan antara *hypercyclicity* dan *chaos*.

Perhatian terhadap versi lebih kuat dari *hypercyclicity* juga terus berkembang. Misalnya, konsep *frequently hypercyclic* diperkenalkan oleh Bayart dan Grivaux (2006) untuk menggambarkan orbit yang tidak hanya rapat, tetapi cukup memenuhi setiap bagian dari ruang. Sementara itu, Bayart dan Matheron (2009) menjadi referensi utama dalam memahami dinamika pada operator linear.

Penelitian juga berkembang ke arah operator dengan properti yang lebih kuat, seperti *hereditarily hypercyclic operators* oleh Bès & Peris (1999), *common hypercyclic vectors* oleh Abakumov & Gordon (2003), serta sifat rekuren dalam konteks *hypercyclicity* (Bès, Menet, Peris, & Puig, 2016). Eksplorasi lebih lanjut terhadap *translation operator* (Ivković & Tabatabaie, 2021), *convolution* (Muro, Pinasco, & Savransky, 2017) (Bès, Conejero, & Papathanasiou, 2017), *generalized shifts* (Ivković & Tabatabaie, 2023), dan *pseudo-shift* (Çolakoğlu, Martin, & Sanders, 2022) menunjukkan bahwa cakupan studi tentang operator *hypercyclic* cukup luas. Operator *Cesàro-hypercyclic* (El Berrag, 2021), *disjoint hypercyclic* (Çolakoğlu & Martin, 2021; Çolakoğlu, Martin, & Sanders, 2022), dan bahkan operator yang λ -commute dengan *Hardy shift* (Amouch, León-Saavedra, & Romero de la Rosa, 2023) menunjukkan bahwa banyak struktur operator dapat menampilkan dinamika *hypercyclic* yang menarik.

Salah satu operator klasik dalam kajian ini adalah *backward shift*, yang menjadi subjek penting dalam banyak studi karena memiliki struktur yang sederhana namun kaya secara dinamik. Dalam hal ini, modifikasi terhadap bobot pada *backward shift* menjadi topik utama yang membuka peluang eksplorasi. Rolewicz (1969) telah mengalikan operator *backward shift* dengan bobot λ ($|\lambda| > 1$) dan membuktikan bahwa operator tersebut adalah operator *hypercyclic*. Studi oleh Salas (1995), Grosse-Erdmann (2000), serta Bayart dan Grivaux (2006) telah mengkaji kondisi yang menyebabkan *weighted backward shift* menjadi *hypercyclic* atau bahkan *chaotic*. Belakangan juga muncul studi yang mengeksplorasi generalisasi lebih lanjut terhadap operator shift seperti *generalized shift operators* (Ivković & Tabatabaie, 2023), *Rolewicz-type operators* (Çolakoğlu & Martin, 2021), dan operator dengan struktur tambahan seperti aljabar *hypercyclic* (Bayart, Costa Júnior, & Papathanasiou, 2019) (Bès, Conejero, & Papathanasiou, 2017). Berkaitan dengan vektor *hypercyclic*, Tsirivas (2017) telah mengkaji vector *hypercyclic* bersama bagi beberapa operator *backward shift*. Sementara itu, studi terbaru oleh Kubursly (2024) memberikan kajian tentang *weak supercyclicity* dan posisinya dalam dinamika operator.

Studi yang ada tersebut cenderung menggunakan konstruksi umum tanpa memberikan penjelasan yang mendetil. Oleh karena itu penelitian ini akan fokus pada modifikasi bobot operator *backward shift* pada ruang barisan ℓ^p agar menjadi operator *hypercyclic*, yang memberikan penjelasan yang lebih eksplisit dan mendetil. Pendekatan ini diharapkan dapat memberikan kontribusi dalam mengisi kekosongan tersebut dan memperkaya teori operator *hypercyclic* dengan metode konstruktif yang lebih bersifat teknis.

2. METODE PELAKSANAAN

Penelitian ini bertujuan mengonstruksi operator *hypercyclic* pada ℓ^p . Metode yang dilakukan adalah memodifikasi cara yang diterapkan Rolewicz (1969) yang mengalikan operator *backward shift* dengan bobot konstan. Modifikasi yang dimaksud adalah mengalikan operator *backward shift* dengan bobot-bobot yang tidak selalu konstan. Bobot yang dinyatakan dengan barisan $\mathbf{a} = (a_n)$ akan mempengaruhi perilaku operator $S_{\mathbf{a}}$ sebagai wujud modifikasi dari operator *backward shift*. Sifat-sifat operator $S_{\mathbf{a}}$ akan dieksplorasi dan dibuktikan menggunakan prinsip-prinsip pembuktian dalam matematika yang bersifat deduktif dan logis. Pendekatan utama yang digunakan adalah penalaran formal, dengan menekankan struktur argumentasi yang valid dan koheren. Pada proses pembuktian, digunakan berbagai bentuk inferensi logis klasik seperti *modus ponens*, *modus tollens*, dan silogisme. Setiap klaim atau pernyataan matematika dibangun atas dasar premis-premis yang telah terbukti atau diasumsikan benar, lalu diturunkan kesimpulannya secara ketat dan sistematis. Metode induksi matematika juga digunakan untuk membuktikan keabsahan hasil secara umum yang memuat pernyataan yang melibatkan pola atau struktur berulang. Induksi ini dilakukan dengan dua tahap utama: membuktikan kebenaran kasus dasar, kemudian menunjukkan bahwa jika pernyataan berlaku untuk suatu bilangan n , maka pernyataan juga berlaku untuk $n + 1$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Secara matematis, jika $T: X \rightarrow X$ adalah operator linear pada ruang vektor X , dan $\mathbf{x} \in X$, maka orbit dari $\mathbf{x}$ di bawah T didefinisikan sebagai himpunan

$$Orb(T, \mathbf{x}) = \{T^n(\mathbf{x}) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

dengan T^n menyatakan komposisi operator T sebanyak n kali, yaitu $\underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{n \text{ kali}}$.

Konsep *hypercyclicity* muncul ketika terdapat sebuah vektor $\mathbf{x} \in X$ yang orbitnya $Orb(T, \mathbf{x})$ *dense* di dalam X . Artinya untuk setiap $\mathbf{x} \in X$ dan untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\mathbf{y} \in Orb(T, \mathbf{x})$ sehingga $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \varepsilon$. Dalam konteks ini, perhatian akan diarahkan pada konstruksi operator *hypercyclic* pada ruang $\ell^p(\mathbb{R})$ dengan $1 \leq p < \infty$, yaitu ruang dari semua barisan bilangan riil $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$. Ruang ini merupakan ruang vektor bernorma dengan norma didefinisikan sebagai berikut

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

untuk $1 \leq p < \infty$. Ruang $\ell^p(\mathbb{R})$ merupakan ruang Banach lengkap terhadap norma tersebut. Pada pembahasan selanjutnya Ruang $\ell^p(\mathbb{R})$ akan ditulis ℓ^p dan $\|\mathbf{x}\|_p$ akan ditulis $\|\mathbf{x}\|$.

Langkah yang dilakukan untuk memperoleh operator *hypercyclic* pada ℓ^p akan dilakukan dengan mengadopsi pendekatan yang digunakan oleh Rolewicz, yaitu dengan memodifikasi operator *backward shift* berbobot. Dalam operator yang diajukan oleh Rolewicz, sebuah bilangan skalar λ dengan $|\lambda| > 1$ dikalikan terhadap operator *backward shift* S artinya setiap elemen dari barisan $\mathbf{x} = (x_n) \in \ell^p$ akan dikalikan dengan skalar λ setelah dikenakan operator tersebut. Ide yang dikembangkan adalah mengganti skalar λ tersebut dengan sebuah barisan bobot (a_n) . Setiap elemen x_n dari $\mathbf{x} \in \ell^p$ akan dikalikan dengan bobot a_n yang dapat berbeda-beda. Dengan demikian, akan diperoleh modifikasi operator *backward shift* yang bersesuaian dengan barisan bobot (a_n) yang selanjutnya akan dibuktikan sebagai operator *hypercyclic*.

Diberikan barisan tak nol (a_n) . Misalkan bahwa $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^p$. Artinya $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$. Selanjutnya $(a_1x_2, a_2x_3, a_3x_4, \dots)$ memenuhi

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i x_{i+1}|^p < \infty$$

dengan syarat bahwa (a_n) adalah barisan terbatas. Artinya $(a_1x_2, a_2x_3, a_3x_4, \dots) \in \ell^p$ jika (a_n) terbatas. Dengan cara yang sama dan syarat tambahan bahwa $\inf a_n \neq 0$, juga dapat ditunjukkan bahwa $(0, \frac{1}{a_1}x_1, \frac{1}{a_2}x_2, \frac{1}{a_3}x_3, \dots) \in \ell^p$. Berdasarkan hal ini, selanjutnya dapat didefinisikan dua operator $S_a, T_a: \ell^p \rightarrow \ell^p$ sebagai berikut

$$S_a((x_1, x_2, x_3, \dots)) = (a_1x_2, a_2x_3, a_3x_4, \dots) \quad (1)$$

$$T_a((x_1, x_2, x_3, \dots)) = \left(0, \frac{1}{a_1}x_1, \frac{1}{a_2}x_2, \frac{1}{a_3}x_3, \dots\right) \quad (2)$$

Sebelum lebih lanjut membahas S_a merupakan operator *hypercyclic*, akan terlebih dahulu dibahas sifat dasar dari operator tersebut. Jika diketahui skalar u, v dan vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in \ell^p$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} S_a(u\mathbf{x} + v\mathbf{y}) &= S_a(ux_1 + vy_1, ux_2 + vy_2, ux_3 + vy_3, \dots) \\ &= (a_1(ux_2 + vy_2), a_2(ux_3 + vy_3), a_3(ux_4 + vy_4), \dots) \\ &= u(a_1x_2, a_2x_3, a_3x_4, \dots) + v(a_1y_2, a_2y_3, a_3y_4, \dots) \\ &= uS_a((x_1, x_2, x_3, \dots)) + vS_a((y_1, y_2, y_3, \dots)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_a(ux + vy) &= T_a(ux_1 + vy_1, ux_2 + vy_2, ux_3 + vy_3, \dots) \\
&= \left(\frac{1}{a_2}(ux_2 + vy_2), \frac{1}{a_3}(ux_3 + vy_3), \frac{1}{a_4}(ux_4 + vy_4), \dots \right) \\
&= u \left(0, \frac{1}{a_1}x_1, \frac{1}{a_2}x_2, \frac{1}{a_3}x_3, \frac{1}{a_4}x_4, \dots \right) + v \left(0, \frac{1}{a_1}y_1, \frac{1}{a_2}y_2, \frac{1}{a_3}y_3, \frac{1}{a_4}y_4, \dots \right) \\
&= uT_a((x_1, x_2, x_3, \dots)) + vT_a((y_1, y_2, y_3, \dots))
\end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa operator S_a and T_a merupakan operator linear.

Orbit dari suatu vektor x didefinisikan sebagai barisan iteratif, yaitu hasil penerapan operator tertentu sebanyak n kali pada vektor x . Oleh karena itu, bagaimana posisi x berkembang seiring bertambahnya n perlu diamati. Untuk memahami struktur orbit ini, perlu dipelajari sifat-sifat dari operator itu sendiri. Secara khusus, perhatian diarahkan pada perilaku operator S_a dan T_a saat n menjadi sangat besar. Diperhatikan bahwa

$$S_a^2((x_1, x_2, x_3, \dots)) = S_a(a_1x_2, a_2x_3, a_3x_4, \dots) = (a_1a_2x_3, a_2a_3x_4, a_3a_4x_5, \dots)$$

dan

$$T_a^2((x_1, x_2, x_3, \dots)) = T_a\left(0, \frac{1}{a_1}x_1, \frac{1}{a_2}x_2, \frac{1}{a_3}x_3, \dots\right) = \left(0, 0, \frac{1}{a_1a_2}x_1, \frac{1}{a_2a_3}x_2, \frac{1}{a_3a_4}x_3, \dots\right)$$

Sifat ini dapat diperumum seperti yang terlihat dalam Lemma 1 sebagai berikut.

Lemma 1. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\begin{aligned}
\text{a) } S_a^n((x_1, x_2, x_3, \dots)) &= (a_1 \dots a_n x_{n+1}, a_2 \dots a_{n+1} x_{n+2}, a_3 \dots a_{n+2} x_{n+3}, \dots) \\
\text{b) } T_a^n((x_1, x_2, x_3, \dots)) &= \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ suku}}, \frac{1}{a_1 \dots a_n} x_1, \frac{1}{a_2 \dots a_{n+1}} x_2, \frac{1}{a_3 \dots a_{n+2}} x_3, \dots \right)
\end{aligned}$$

Operator S_a bekerja dengan menggeser komponen barisan ke kiri lalu mengalikan setiap komponen hasil geseran dengan suatu skalar a_n yang bersesuaian. Sebaliknya, operator T_a melakukan pergeseran ke kanan, menyisipkan angka nol di posisi pertama, kemudian membagi setiap komponen dengan a_n . Secara sekilas kedua operator ini tampak sebagai semacam invers satu sama lain. Untuk lebih mengetahui lebih lanjut, dapat dilakukan dengan mempelajari komposisi antara T_a dan S_a . Dalam pembahasan selanjutnya S_a komposisi T_a ditulis dengan $S_a T_a$. Perhatikan fakta berikut ini

$$\begin{aligned}
S_a T_a((x_1, x_2, x_3, \dots)) &= S_a \left(\left(0, \frac{1}{a_1}x_1, \frac{1}{a_2}x_2, \frac{1}{a_3}x_3, \dots \right) \right) \\
&= \left(a_1 \frac{1}{a_1}x_1, a_2 \frac{1}{a_2}x_2, a_3 \frac{1}{a_3}x_3, \dots \right) \\
&= (x_1, x_2, x_3, \dots)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_a S_a((x_1, x_2, x_3, \dots)) &= T_a(a_1 x_2, a_2 x_3, a_3 x_4, \dots) \\
&= \left(0, \frac{1}{a_1} a_1 x_2, \frac{1}{a_2} a_2 x_3, \frac{1}{a_3} a_3 x_4, \dots\right) \\
&= (0, x_2, x_3, \dots)
\end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan komposisi antara operator S_a dan T_a , diperoleh hasil yang cukup menarik. Diketahui bahwa $S_a T_a(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ untuk setiap $\mathbf{x}$ di ruang ℓ^p . Hal ini menunjukkan bahwa T_a adalah invers kiri dari S_a , dengan kata lain dapat mengembalikan hasil dari S_a . Namun demikian, dugaan bahwa S_a dan T_a merupakan dua operator yang invers ternyata tidak tepat. Hal ini dapat dilihat berdasarkan komposisi sebaliknya yaitu $T_a S_a(\mathbf{x})$ yang ternyata tidak menghasilkan $\mathbf{x}$ kembali secara penuh. Hasil dari $T_a S_a(\mathbf{x})$ hanya berbeda dari $\mathbf{x}$ pada komponen pertama, yaitu elemen indeks ke-1. Jika didefinisikan $\mathbf{y} = T_a S_a(\mathbf{x})$, maka diperoleh bahwa $y_1 = 0$ dan $y_n = x_n$ untuk setiap $n \geq 2$. Berdasarkan hal ini dapat disimpulkan bahwa $T_a S_a(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ jika dan hanya jika $x_1 = 0$. Jika diperhatikan lebih jauh, perbedaan antara $\mathbf{x}$ dan hasil operasinya terbatas hanya pada satu posisi saja, yang memberikan kesan bahwa meskipun $T_a S_a$ tidak sama dengan operator I (Operator Identitas, $I(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$), namun operator ini “hampir identitas”. Fakta ini membuka kemungkinan untuk mengeksplorasi sifat dari komposisi berulang pada S_a dan T_a . Misalnya, bagaimana bentuk dari $(T_a S_a)^n(\mathbf{x})$ atau $T_a^n S_a^n(\mathbf{x})$ ketika n semakin besar? Apakah komponen yang bernilai nol akan menyebar ke posisi lain, atau tetap terlokalisasi di awal saja? Selain itu, juga dapat diamati apakah $(S_a T_a)^n(\mathbf{x})$ atau $S_a^n T_a^n(\mathbf{x})$, yang tampaknya selalu mengembalikan $\mathbf{x}$, mengingat bahwa $S_a T_a = I$. Jawaban atas pertanyaan-pertanyaan tersebut dirangkum dalam Lemma 2 berikut ini.

Lemma 2. Untuk Setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^p$ berlaku

- $(S_a T_a)^n((x_1, x_2, x_3, \dots)) = (S_a^n T_a^n((x_1, x_2, x_3, \dots))) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$
- $(T_a S_a)^n((x_1, x_2, x_3, \dots)) = (0, x_2, x_3, \dots)$
- $T_a^n S_a^n((x_1, x_2, x_3, \dots)) = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ suku}}, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\right)$

Bukti.

- Karena $S_a T_a = I$ maka dapat dengan mudah dibuktikan bahwa untuk setiap $\mathbf{x} \in \ell^p$ berlaku $(S_a T_a)^n(\mathbf{x}) = S_a^n T_a^n(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Jika diasumsikan $S_a^k T_a^k((x_1, x_2, x_3, \dots)) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
S_a^{k+1}T_a^{k+1}((x_1, x_2, x_3, \dots)) &= S_a \left(S_a^k \left(T_a^k \left(T_a((x_1, x_2, x_3, \dots)) \right) \right) \right) \\
&= S_a \left(S_a^k \left(T_a^k \left(\left(0, \frac{1}{a_1}x_1, \frac{1}{a_2}x_2, \frac{1}{a_3}x_3, \dots \right) \right) \right) \right) \\
&= S_a \left(\left(0, \frac{1}{a_1}x_1, \frac{1}{a_2}x_2, \frac{1}{a_3}x_3, \dots \right) \right) \\
&= (x_1, x_2, x_3, \dots)
\end{aligned}$$

- b) Jelas bahwa $T_a S_a((x_1, x_2, x_3, \dots)) = (0, x_2, x_3, \dots)$. Diperhatikan bahwa elemen pertama pada $(0, x_2, x_3, \dots)$ adalah 0. Oleh karena itu jika $(0, x_2, x_3, \dots)$ dikenakan oleh $T_a S_a$ maka akan menghasilkan dirinya sendiri. Jadi untuk $n \geq 2$ diperoleh bahwa $(T_a S_a)^n((x_1, x_2, x_3, \dots)) = (0, x_2, x_3, \dots)$
- c) Persamaan tersebut jelas berlaku untuk $n = 1$. Selanjutnya dimisalkan bahwa

$$T_a^k S_a^k((x_1, x_2, x_3, \dots)) = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{k \text{ suku}}, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots \right)$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned}
T_a^{k+1}S_a^{k+1}((x_1, x_2, x_3, \dots)) &= T_a \left(T_a^k \left(S_a^k \left(S_a((x_1, x_2, x_3, \dots)) \right) \right) \right) \\
&= T_a \left(T_a^k \left(S_a^k(a_1x_2, a_2x_3, a_3x_4, \dots) \right) \right) \\
&= T_a \left(\left(\underbrace{0, \dots, 0}_{k \text{ suku}}, a_{k+1}x_{k+2}, a_{k+2}x_{k+3}, \dots \right) \right) \\
&= \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{k+1 \text{ suku}}, \frac{a_{k+1}x_{k+2}}{a_{k+1}}, \frac{a_{k+2}x_{k+3}}{a_{k+2}}, \dots \right) \\
&= \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{k+1 \text{ suku}}, x_{k+2}, x_{k+3}, \dots \right)
\end{aligned}$$

Jadi berdasarkan prinsip induksi matematika dapat disimpulkan bahwa persamaan berlaku untuk semua $n \in \mathbb{N}$ ■

Hasil dalam Lemma 2 menunjukkan bahwa operator $(S_a T_a)^n$ dan $S_a^n T_a^n$ keduanya menghasilkan operator identitas. Artinya, penerapan gabungan operator-operator tersebut secara berulang sebanyak n kali tidak mengubah elemen vektor yang dikenai. Namun, situasi ini berbeda ketika urutan operator dibalik menjadi $(T_a S_a)^n$ atau $T_a^n S_a^n$. Kedua bentuk ini memang masih mengembalikan vektor x dengan sebagian besar komponennya tetap, tetapi terdapat perubahan pada komponen-komponen awal. Secara khusus, $(T_a S_a)^n$ hanya mengubah satu komponen awal dari x , sementara $T_a^n S_a^n$

mengubah sebanyak n komponen awal menjadi nol. Hal ini menunjukkan bahwa urutan penerapan operator dalam komposisi sangat memengaruhi hasil akhir.

Lemma 3. Jika $m > n$ maka

- a) $S_a^m T_a^n((x_1, x_2, x_3, \dots)) = S_a^{m-n}((x_1, x_2, x_3, \dots))$
- b) $S_a^n T_a^m((x_1, x_2, x_3, \dots)) = T_a^{m-n}(x_1, x_2, x_3, \dots)$
- c) $T_a^m S_a^n((x_1, x_2, x_3, \dots)) = T_a^{m-n} \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ elemen}}, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots \right)$
- d) $T_a^n S_a^m((x_1, x_2, x_3, \dots)) = S_a^{m-n} \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{m \text{ elemen}}, x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+3}, \dots \right)$

Bukti. Bukti dari Lemma 2 ini bergantung pada Lemma 1.

a) Diperhatikan bahwa berdasarkan Lemma 1 diperoleh

$$S_a^m T_a^n((x_1, x_2, x_3, \dots)) = S_a^{m-n}(S_a^n T_a^n((x_1, x_2, x_3, \dots))) = S_a^{m-n}((x_1, x_2, x_3, \dots))$$

b) Diperhatikan bahwa berdasarkan Lemma 1 diperoleh

$$S_a^n T_a^m((x_1, x_2, x_3, \dots)) = S_a^n T_a^n(T_a^{m-n}((x_1, x_2, x_3, \dots))) = T_a^{m-n}((x_1, x_2, x_3, \dots))$$

c) Diperhatikan bahwa berdasarkan Lemma 1 diperoleh

$$\begin{aligned} T_a^m S_a^n((x_1, x_2, x_3, \dots)) &= T_a^{m-n}(T_a^n S_a^n((x_1, x_2, x_3, \dots))) \\ &= T_a^{m-n} \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n \text{ elemen}}, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots \right) \\ &= \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m \text{ elemen}}, \frac{1}{a_{n+1} \dots a_m} x_{n+1}, \frac{1}{a_{n+2} \dots a_{m+1}} x_{n+2}, \dots \right) \\ &= T_a^{m-n}(0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots) \end{aligned}$$

d) Diperhatikan bahwa berdasarkan Lemma 1 diperoleh

$$\begin{aligned} T_a^n S_a^m((x_1, x_2, x_3, \dots)) &= T_a^n S_a^n(S_a^{m-n}((x_1, x_2, x_3, \dots))) \\ &= T_a^n S_a^n(a_1 \dots a_{m-n} x_{m-n+1}, a_2 \dots a_{m-n+1} x_{m-n+2}, \dots) \\ &= \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ elemen}}, a_{n+1} \dots a_m x_{m+1}, a_{n+2} \dots a_{m+1} x_{m+2}, \dots \right) \\ &= S_a^{m-n} \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{m \text{ elemen}}, x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+3}, \dots \right) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Sifat-sifat dasar dari operator S_a dan T_a yang telah diuraikan dapat digunakan untuk mengonstruksi vektor *hypercyclic* yang bersesuaian dengan operator S_a . Pengetahuan tentang hal ini memberikan alat yang diperlukan untuk membangun atau mengenali operator *hypercyclic* secara eksplisit melalui manipulasi dan iterasi dari S_a dan T_a .

Aspek yang juga penting dalam memahami perilaku orbit adalah meninjau bagaimana *norm* dari S_a^n dan T_a^n untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 4. Operator S_a dan T_a merupakan operator terbatas

Bukti. Jika $a = (a_n)$ adalah barisan terbatas maka terdapat $M > 0$ sehingga untuk setiap vektor $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, diperoleh

$$\begin{aligned}\|S_a(x)\| &= \|S_a(x_1, x_2, x_3, \dots)\| = \|(a_1x_2, a_2x_3, a_3x_4, \dots)\| \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i x_{i+1}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} M^p |x_{i+1}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= M \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_{i+2}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq M \|(x_1, x_2, x_3, \dots)\|\end{aligned}$$

Hal ini membuktikan bahwa operator S_a merupakan operator terbatas. Cara yang sama juga dapat diterapkan untuk menunjukkan bahwa T_a adalah operator terbatas. ■

Pembuktian bahwa operator S_a merupakan operator *hypercyclic* akan melibatkan himpunan F yaitu koleksi barisan bilangan rasional pada ℓ^p dengan elemen tak nolnya sebanyak berhingga. Berdasarkan definisi ini, F memenuhi sifat berikut: (i) untuk setiap barisan di dalam $x \in F$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sehingga $x_i = 0$ untuk $i > k$ dan (ii) F merupakan himpunan *countable* karena himpunan bilangan rasional merupakan himpunan yang *countable*. Oleh karena itu F dapat dinyatakan sebagai berikut

$$F = \{f_n: f_{n,i} = 0 \text{ untuk } i > k \text{ untuk suatu } k\}.$$

Sebagai contoh pada barisan $f = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, \dots)$, indeks terbesar sehingga $f_i \neq 0$ adalah 4. Selanjutnya karena f_i adalah bilangan rasional untuk setiap $i \in \mathbb{N}$ maka dapat disimpulkan bahwa barisan f adalah anggota F .

Himpunan F yang didefinisikan tersebut merupakan himpunan yang *dense* di dalam ℓ^p . Untuk setiap $x \in \ell^p$ diperoleh bahwa $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$. Artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat

$m_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m \geq m_0$ berlaku $\sum_{i=m_0+1}^{\infty} |x_i|^p < \frac{\varepsilon}{2}$. Selanjutnya dapat didefinisikan vector $\mathbf{y}$ sehingga $y_i = q_i$ untuk $i = 1 \dots m_0$ $y_i = 0$ untuk $i > m_0$ untuk beberapa nilai q_i sehingga $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \varepsilon$.

Jika $k(n)$ adalah indeks terbesar dari $\mathbf{f}_n \in F$ sehingga $f_{n,k(n)} \neq 0$, maka berdasarkan Lemma 1b, diperoleh bahwa indeks terbesar dari elemen yang tidak nol pada $T_a^m(\mathbf{f}_n)$ adalah $m + k(n)$. Akibatnya

$$\|T_a^m(\mathbf{f}_n)\| = \sum_{i=m+1}^{m+k(n)} \left| \frac{f_{n,i}}{\prod_{j=i}^{i+n-1} a_j} \right|^p. \quad (3)$$

Persamaan (3) ini menunjukkan bahwa konstruksi barisan terbatas (a_n) menjadi sangat penting dan tidak dapat dilakukan secara sembarang. Sebab bisa jadi (a_n) yang diperoleh justru mengakibatkan operator S_a atau T_a bukanlah operator hypercyclic pada ℓ^p .

Selanjutnya didefinisikan barisan $\mathbf{a} = (a_n)$ dengan

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Pada pembahasan selanjutnya barisan (a_n) inilah yang akan digunakan untuk membuktikan bahwa S_a merupakan operator *hypercyclic*. Barisan ini merupakan barisan yang terbatas karena $|a_n| \leq 2$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Selain itu diperoleh bahwa

$$\prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{i}\right) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{i+1}{i}\right) = n + 1 \rightarrow \infty.$$

Hal ini mengakibatkan $\|T_a^m(\mathbf{f}_1)\| \rightarrow 0$ untuk $m \rightarrow \infty$ (lihat Persamaan 3). Fakta ini kemudian dapat digunakan untuk mengkonstruksi Lemma 5 berikut ini.

Lemma 5. Diketahui $\mathbf{f}_i \in F$. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, terdapat barisan naik $r(n)$ sehingga $\|T_a^{r(n)}(\mathbf{f}_n)\| < \frac{1}{2^n}$ dan $S_a^{r(n)}(\mathbf{f}_i) = \mathbf{0}$ untuk setiap $i < n$

Bukti. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, didefinisikan $k(n)$ sebagai indeks terbesar dari $\mathbf{f}_n \in F$ sehingga $f_{n,k(n)} \neq 0$.

Untuk $\mathbf{f}_1 \in \ell^p$, karena $\|T_a^m(\mathbf{f}_1)\| \rightarrow 0$ untuk $m \rightarrow \infty$, maka terdapat $m_1 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m \geq m_1$ berlaku $\|T_a^m(\mathbf{f}_1)\| < \frac{1}{2}$. Selanjutnya pilih $r(1)$ sehingga $r(1) > \max\{k(1), m_1\}$. Diperoleh bahwa $\|T_a^{r(1)}(\mathbf{f}_2)\| < \frac{1}{2}$.

Untuk $f_2 \in \ell^p$, karena $\|T_a^m(f_2)\| \rightarrow 0$ untuk $m \rightarrow \infty$, maka terdapat $m_2 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m \geq m_2$ berlaku $\|T_a^m(f_2)\| < \frac{1}{2^2}$. Selanjutnya pilih $r(2)$ sehingga $r(2) > \max\{k(2), m_2, r(1)\}$. Jadi diperoleh $r(2)$ sehingga $r(2) > r(1)$ dan $\|T_a^{r(2)}(f_2)\| < \frac{1}{2^2}$.

Jika proses dilanjutkan maka akan diperoleh kesimpulan bahwa untuk setiap $n \geq 2$ terdapat $r(n)$ sehingga $r(n) > r(n-1)$ dan $\|T_a^{r(n)}(f_n)\| < \frac{1}{2^n}$.

Selanjutnya karena $r(n) < r(i)$ untuk $i < n$ maka $S_a^{r(n)}(f_i) = \mathbf{0}$. ■

Fakta yang diperoleh pada Lemma 5 menjadi sangat penting dalam pembuktian S_a sebagai operator *hypercyclic*. Secara formal hasil ini dapat dilihat pada Proposisi 1 berikut

Proposisi 1. Operator S_a dengan $a = (a_n) = (1 + \frac{1}{n})$ merupakan operator *hipercyclic*

Bukti. Diambil sembarang $x \in \ell^p$. Karena F dense di dalam ℓ^p maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $v \in F$ such that $\|v - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Selanjutnya berdasarkan Lemma 5, terdapat barisan tak naik $r(n)$ sehingga

$$\|T_a^{r(n)}(f_n)\| < \frac{1}{2^n}$$

untuk setiap $f_n \in F$ dan $S_a^{r(n)}(f_i) = \mathbf{0}$ untuk setiap $i < n$. Selanjutnya didefinisikan vektor z sebagai berikut

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} T_a^{p(n)}(f_n)$$

dengan $p(n) = \sum_{i=1}^n r(i)$. Diperhatikan bahwa

$$\|z\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} T_a^{p(n)}(f_n) \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|T_a^{p(n)}(f_n)\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Hal ini menunjukkan bahwa $z \in \ell^p$. Selanjutnya berdasarkan Lemma 2 dan Lemma 3 diperoleh bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$S_a^{p(n)}(z) = S_a^{p(n)}\left(\sum_{i=1}^{\infty} T_a^{p(i)}(f_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} S_a^{p(n)}(T_a^{p(i)}(f_i)) = f_n + \sum_{i=n+1}^{\infty} T_a^{p(i)-p(n)}(f_i)$$

Akibatnya berdasarkan sifat Archimedes terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga

$$\|S_a^{p(n_0)}(\mathbf{z}) - \mathbf{f}_{n_0}\| = \left\| \sum_{i=n_0+1}^{\infty} (T_a^{p(i)-p(n)}(\mathbf{f}_i)) \right\| \leq \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \|T_a^{r(i)}(\mathbf{f}_i)\| \leq \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{1}{2^{n_0}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Akhirnya jika F disusun sedemikian sehingga $\mathbf{v} = \mathbf{f}_{n_0}$ maka diperoleh bahwa untuk setiap $\mathbf{x} \in \ell^p$ terdapat $S_a^{p(n_0)}(\mathbf{z})$ sehingga

$$\|S_a^{p(n_0)}(\mathbf{z}) - \mathbf{x}\| = \|S_a^{p(n_0)}(\mathbf{z}) - \mathbf{f}_{n_0} + \mathbf{f}_{n_0} - \mathbf{x}\| \leq \|S_a^{p(n_0)}(\mathbf{z}) - \mathbf{f}_{n_0}\| + \|\mathbf{f}_{n_0} - \mathbf{x}\| < \varepsilon. \blacksquare$$

Berdasarkan pembuktian diperoleh bahwa $Orb(S_a, \mathbf{z})$ dense di dalam ℓ^p . Oleh karenanya vektor $\mathbf{z}$ disebut sebagai vector hypercyclic yang bersesuaian dengan operator S_a .

4. SIMPULAN

Penelitian ini berhasil mengonstruksi secara eksplisit operator hypercyclic pada ruang barisan ℓ^p melalui modifikasi operator backward shift dengan bobot yang tidak konstan. Pendekatan konstruktif ini menunjukkan bahwa operator yang dihasilkan memiliki vektor dengan orbit padat di ruang ℓ^p , sehingga memenuhi definisi hypercyclicity. Sifat-sifat operator, termasuk batas komposisi dan keterbatasannya, telah dianalisis secara sistematis dan memberikan dasar logis untuk kesimpulan tersebut. Temuan ini membuktikan bahwa struktur dinamis yang kompleks dapat dibangun dari operator linear sederhana.

5. REKOMENDASI

Barisan bobot yang diperoleh pada penelitian ini adalah barisan yang monoton turun dan terbatas, dengan kata lain barisan ini konvergen. Oleh karenanya sangat masuk akal jika studi selanjutnya dilakukan pada barisan konvergen. Eksplorasi dapat dilakukan pada sifat-sifat barisan konvergen (a_n) yang menjadi syarat perlu atau syarat cukup agar S_a merupakan operator hypercyclic.

6. REFERENSI

- Abakumov, E., & Gordon, J. (2003). Common hypercyclic vectors for multiples of backward shift. *Journal of Functional Analysis* 200 (2003). 494–504.
- Amouch, M., León-Saavedra, F., & Romero de la Rosa, M. P. (2023). Hypercyclicity of Operators That λ -Commute with The Hardy Backward Shift. *Journal of Mathematical Sciences* (2024) 280:33–49
- Bayart, F., Costa Júnior, F., & Papathanasiou, D. (2021). Baire Theorem and Hypercyclic Algebras. *Advances in Mathematics*. 376 (2021). 1-58
- Bayart, F., & Grivaux, S. (2006). Frequently hypercyclic operators. *Transactions of The American Mathematical Society*. 358(11) 5083–5117
- Bayart, F., & Matheron, É. (2009). *Dynamics of Linear Operators*. Cambridge University Press.
- Bès, J., Conejero, J.A., & Papathanasiou, D. (2017). Convolution operators supporting hypercyclic algebras. *J. Math. Anal. Appl.* 445 (2017) 1232–1238

- Bès, J., & Peris, A. (1999). Hereditarily hypercyclic operators. *Journal of Functional Analysis*. 167 (1999). 94-112
- Bès, J., Menet, Q., Peris, A., & Puig, Y. (2016). Recurrence Properties of Hypercyclic Operators. *Math. Ann.* 366 (2016). 545–572
- Çolakoglu, N., Martin, Ö., & Sanders, R. (2022). Disjoint and Simultaneously Hypercyclic Pseudo-shifts. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 512(2): 126130.
- Çolakoglu, N., & Martin, Ö. (2021). Disjoint and simultaneous hypercyclic Rolewicz-type operators. Hacettepe *Journal of Mathematics & Statistics*. 50 (6). 1609 – 1619
- Kubrusly, C.S.(2024). Weak Supercyclicity—An Expository Survey. *Results Math* 79, 194 (2024).
- El Berrag, M. (2024). On Cesàro-Hypercyclic Operators. *Int. J. Anal. Appl.* 1-8
- Grosse-Erdmann, K.-G. (1999). Universal families and hypercyclic operators. *Bull. AMS*, 36(3), 345–381.
- Grosse-Erdmann, K.-G. (2000). Hypercyclic and chaotic weighted shifts. *Studia Mathematica* 139 (1), 47-69
- Ivković, S., & Tabatabaie, S.M. (2023). Hypercyclic Generalized Shift Operators. *Complex Anal. Oper. Theory*. 17 (60)
- Ivković, S., & Tabatabaie, S.M. (2021). Hypercyclic Translation Operators on the Algebra of Compact Operators. *Iran J Sci Technol Trans Sci* 45, 1765–17750.
- Muro, S., Pinasco, D., & Savransky, M. (2017). Hypercyclic Behavior of Some Non-Convolution Operators on $H(\mathbb{C}^N)$. *Journal of Operator Theory*, Vol. 77(1), pp. 39–59.
- Rolewicz, S. (1969). On orbits of elements. *Studia Mathematica*, 32, 17–22.
- Salas, H. N. (1995). Hypercyclic weighted shifts. *Trans. AMS*, 347(3), 993–1004.
- Tsirivas, N. (2017). Common Hypercyclic Vectors for Backward Shift Operators. *Journal of Operator Theory*. 77 (1) , pp. 3-17