Griya Journal of Mathematics Education and Application
Volume 5 Nomor 4, Desember 2025
e-ISSN 2776-124X||p-ISSN 2776-1258
https://mathjournal.unram.ac.id/index.php/Griya/index

Faktorisasi Matriks Hermitian Nonkomutatif Berdasarkan Trace

Mira Wadu*, Albert Mario Kumanireng, Arista M. Tamonob

Matematika, FST, Universitas Nusa Cendana, Kupang

mira_wadu@staf.undana.ac.id

Diterima: 09-11-2025; Direvisi: 17-12-2025; Dipublikasi: 21-12-2025

Abstract
This article studies the factorization of Hermitian matrices over a division ring based on their trace values. The main result shows that the trace determines the minimum number of Hermitian factors required in factorization depending on the trace value, namely four factors are sufficient for matrices with zero trace, while for matrices with nonzero trace, one additional diagonalizable factor is required. This result indicates a relationship between additive invariance (trace) and multiplicative invariance (Dieudonné determinant) in noncommutative linear algebra.

Keywords: hermitian matrix; division ring; trace; dieudonné determinant; matrix factorization.

Abstrak
Artikel ini mengkaji tentang faktorisasi matriks Hermitian atas ring pembagi berdasarkan nilai *trace*nya. Hasil utama menunjukkan bahwa *trace* menentukan jumlah minimal faktor Hermitian yang diperlukan dalam faktorisasi bergantung pada nilai *trace*, yaitu empat faktor untuk *trace* nol, sedangkan untuk *trace* tak nol membutuhkan satu faktor hemitian yang dapat didiagonalkan. Hasil tersebut menyatakan adanya keterkaitan antara invariant aditif (*trace*) dan invariant multiplikatif (determinan Dieudonné) dalam aljabar linear nonkomutatif.

Kata Kunci: matriks hermitian; ring pembagi; trace; determinan dieudonné; faktorisasi matriks.

1. PENDAHULUAN

Kajian mengenai faktorisasi matriks Hermitian telah lama menjadi topik penting dalam aljabar linear karena keterkaitannya dengan struktur spektral, simetri, dan stabilitas transformasi linear (Botha, 1998; Radjavi, 1969). Pada konteks ring komutatif, telah diketahui bahwa setiap matriks kompleks dengan determinan real dapat dinyatakan sebagai hasil kali sejumlah matriks Hermitian. Secara umum, matriks Hermitian didefinisikan sebagai matriks yang sama dengan konjugat-transposenya $A = \bar{A}^T$ (Doliwa, 2022; Nie & Yang, 2020). Ketika ruang $\mathbb{C}$ digeneralisasi menjadi ring pembagi nonkomutatif K, diperlukan involusi sebagai fungsi pengganti konjugasi kompleks yang memenuhi: $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}, \overline{ab} = \bar{b}\,\bar{a}, \bar{\bar{a}} = a$. Berdasarkan involusi ini, didefinisikan ruang $H_n(K)$ sebagai himpunan matriks – matriks Hermitian berukuran $n \times n$ atas ring pembagi Kdengan involusi $a \mapsto a^*$, yaitu: $H_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid A = A^*\}$, untuk setiap entri a_{ij} berlaku: $a_{ij} = (a_{ji})^*$ (Gatephan & Rodtes, 2025). Namun, ketika ring digeneralisasi menjadi ring pembagi yang bersifat nonkomutatif, sebagian besar hasil faktorisasi tersebut tidak lagi berlaku secara langsung karena hilangnya sifat komutatif dalam operasi perkalian elemen. Oleh karena itu, konsep faktorisasi Hermitian dalam sistem nonkomutatif diperluas seiring dengan perkembangan teori determinan Dieudonné dan konsep involusi pada ring pembagi (Volčič, 2019). Penelitian menunjukkan bahwa matriks Hermitian atas ring pembagi dapat difaktorkan menjadi hasil kali beberapa matriks Hermitian, dan determinan Dieudonné berperan sebagai invariant multipikatif. (Gatephan & Rodtes, 2025).

Namun demikian, kajian tersebut masih sangat terfokus pada invarian multipikatif. Peran invarian aditif, yaitu *trace*, masih terbatas dalam konteks menentukan struktur dan kompleksitas faktorisasi Hermitian, padahal dalam sistem komutatif trace berfungsi penting sebagai penanda keseimbangan simetri dan jumlah nilai eigen. Meskipun, sebelumnya terdapat konsep *trace* yang telah dikaji dalam konteks *traceless* dan *semi-traceless matrices* (Danchev et al., 2024), namun hubungan langsung antara nilai *trace* dan jumlah minimal faktor Hermitian dalam faktorisasi matriks belum dikaji secara eksplisit.

Oleh karena itu, dalam penelitian ini dilakukan kajian tentang faktorisasi matriks Hermitian nonkomutatif berdasarkan nilai *trace*. Penelitian ini bertujuan untuk pengembangan teori dalam menentukan jumlah minimal faktor Hermitian berdasarkan tanda dan nilai trace serta merumuskan teorema faktorisasi Hermitian yang bergantung pada tanda dan nilai *trace*-nya. Hasil yang diperoleh dapat memperjelas hubungan antara invarian aditif dan multiplikatif dalam struktur ruang Hermitian nonkomutatif, sekaligus memperkuat kerangka teori faktorisasi dalam aljabar matriks nonkomutatif.

2. METODE PELAKSANAAN

Penelitian ini bersifat teoritis deduktif dan metode yang digunakan adalah pengembangan teoritis berdasarkan definisi, lema dan teorema yang berlaku pada struktur aljabar nonkomutatif, khususnya pada ruang matriks Hermitian atas ring pembagi. Langkah awal dimulai dengan studi literatur terkait definisi dan sifat – sifat matriks Hermitian, faktorisasi Hermitian dan tracenya. Kedua, dilakukan analisis sifat – sifat *trace* pada ruang matriks Hermitian $H_n(K)$, termasuk keterkaitannya dengan *trace* dan invariasi terhadap persamaan Hermitian. Tujuan dari tahap ini adalah untuk memastikan bahwa *trace* terdefinisi dengan baik sebagai invariant aditif dalam konsep nonkomutatif. Ketiga, dikaji terkait determinan Dieudonné sebagai invariant multiplikatif pada ring pembagi non komutatif berserta sifat – sifatnya. Keempat, dianalisis hubungan antara *trace* dan determinan Dieudonné sehingga diperoleh kondisi – kondisi yang membedakan kasus *trace* nol dan *trace* taknol. Terakhir, deduksi digunakan untuk merumuskan dan membuktikan teorema terkait faktorisasi Hermitian dan kebergantungannya pada jumlah faktor Hemitian terhadap nilai *trace*.

Penelitian ini dilakukan pada ring pembagi nonkomutatif yang dilengkapi involusi, yaitu anti-automorfisma yang memungkinkan pendefinisian matriks konjugat transpos. Matriks yang dikaji adalah matriks persegi berordo hingga dan matriks Hermitian didefinisikan sebagai matriks yang invariant terhadap konjugat transpos. Selain itu, *trace* didefinisikan sebagai jumlah entri diagonal dan bernilai tetap terhadap involusi sehingga berperan sebagai invarian aditif. Sedangkan, determinan Dieudonné digunakan sebagai pengganti determinan klasik dan diasumsikan memenuhi sifat multipikatif sehingga berperan sebagai invarian multipikatif.

Dalam penelitian ini, kajian dibatasi pada kajian teoritis mengenai faktorisasi matriks Hermitian atas ring pembagi nonkomutatif. Penelitian ini tidak membahas algoritma komputasional dan implementasi numerik. Selain itu, kajian ini difokuskan pada hubungan *trace* dan jumlah faktor Hermitian dalam faktorisasi, tanpa mengeksplorasi secara rinci struktur involusinya. Dalam batasan tersebut, penelitian ini diarahkan untuk mengasilkan pengembangan secara teoritis terkait peran invariant aditif dan multipikatif dalam faktorisasi Hermitian nonkomutatif.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Trace pada $\boldsymbol{H_n(K)}$

Dalam aljabar linear klasik, trace dari suatu matriks $A = (a_{ij})$ didefinisikan sebagai: (Anton & Kaul, 2019)

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{1}$$

Dengan sifatnya: (Bikchentaev et al., 2024; Lord et al., 2023)

a. bersifat aditif,
b. invarian terhadap kesamaan (tr $(P^{-1}AP)$ = tr (A)),
c. menggambarkan jumlah nilai eigen dari A.

Namun, pada sistem nonkomutatif, operasi perkalian tidak komutatif ($ab \neq ba$), sehingga trace biasa kehilangan sebagian sifat fundamentalnya(Klep et al., 2018). Pada ruang Hermitian $H_n(K)$, *trace* didefinisikan:

$$\mathrm{Tr}\ (A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{2}$$

untuk $A = (a_{ij}) \in H_n(K)$.

Pada ring pembagi umum, sering digunakan *reduced trace* (Trd) sebagai *trace*nya.
Untuk $A \in M_n(K)$, didefinisikan:

$$\mathrm{Trd}\ (A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \mathrm{mod}\ [K, K] \tag{3}$$

di mana $[\mathrm{K}, \mathrm{K}]$ adalah subgrup aditif yang dihasilkan oleh komutator $[\mathrm{a}, \mathrm{b}] = \mathrm{ab} - \mathrm{ba}$.

Dalam ruang Hermitian $\mathrm{H_n(K)}$, semua entri diagonal sudah terletak di $F \subseteq (K)$(pusat dari K), sehingga $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Trd}\,(A)$. Jadi pada $H_n(K)$, *trace* biasa dan *reduced trace* berimpit.(Danchev et al., 2024)

Beberapa sifat penting dari *trace* Hermitian adalah:

1. Nilai Tetap terhadap Involusi
$$\mathrm{Tr}\,(\bar{A}) = \mathrm{Tr}\,(A), \forall A \in H_n(K) \tag{4}$$
Karena setiap entri diagonal tetap terhadap involusi.
2. Linearitas aditif (terhadap F)
$$\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)\,, \mathrm{Tr}(fA) = f\ \mathrm{Tr}(A)\,, f \in F \tag{5}$$
Sehingga $H_n(K)$ membentuk ruang vektor atas F dengan fungsi *trace* sebagai pemetaan linear ke F.

3. Invariansi terhadap Kesamaan (Similarity)
Jika $P \in GL_n(K)$dan $A' = P^{-1}AP$, maka:
$$\mathrm{Trd}(A') = \mathrm{Trd}(A) \tag{6}$$
Ini menjamin bahwa trace merupakan invarian kesamaan Hermitian.

4. Hubungan dengan determinan Dieudonné
Untuk $A \in H_n(K)$:
$$\mathrm{Tr}\,(A) \in F,\text{dan } \mathrm{Det}(A) \in F^{\times}/[K^{\times}, K^{\times}] \tag{7}$$

Jadi *trace* adalah invarian aditif, sedangkan determinan Dieudonné adalah invarian multiplikatif

Contoh 3.1.1.

a. $H_2(\mathbb{C})$
$$A = \begin{pmatrix} a & z \\ \bar{z} & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}.$$
$$Tr\,(A) = a + b \in \mathbb{R}.$$

b. $H_2(\mathbb{H})$
$$A = \begin{pmatrix} r_1 & q \\ \bar{q} & r_2 \end{pmatrix}, r_1, r_2 \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{H}.$$
$$Tr\,(A) = r_1 + r_2 \in \mathbb{R}.$$

Lema 3.1.1.

Misalkan K sebuah ring pembagi dengan involusi $a \mapsto \bar{a}$ dan $F = \{a \in K : \bar{a} = a\}$. Untuk setiap $A = (a_{ij}) \in H_n(K)$ berlaku
$$tr\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \in F, \tag{8}$$
dan trace biasa berimpit dengan reduced trace pada matriks Hermitian.

Contoh 3.1.1.

Jika $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix} \in H_2(K)$ *maka* $tr(A) = \sum_{i=1}^{2} a_{ii} = 2 + 3 = 5.$

3.2 Determinan pada $H_n(K)$

Determinan Dieudonné, didefinisikan sebagai homomorfisma grup: (Gatephan & Rodtes, 2025)

$$\mathrm{Det}: GL_n(K) \rightarrow K^\times/[K^\times, K^\times] \tag{9}$$

dimana $GL(n, K)$ merupakan grup matriks berukuran $n \times n$ yang *invertibel* dengan entri pada ring pembagi K dan $K^\times/[K^\times, K^\times]$ grup komutatif yang diinduksi oleh fungsi $\delta et: M_n(K) \rightarrow K$, yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\delta et(A) := \begin{cases} 0 & Jika\ A \notin GL_n(K) \\ sgn(\pi) \prod_{i=1}^{n} u_i \neq 0 & Jika\ A \in GL_n(K) \end{cases} \tag{10}$$

Di mana u_i adalah elemen diagonal dari matriks U dan π adalah permutasi dari bentuk normal Bruhat dari A. Jadi, untuk $A \in GL_n(K)$, $Det(A) = \{ax : x \in [K^\times, K^\times]\} =: [a]$ untuk beberapa $a \in K^\times$ dan $Det(A) = 0$ jika A adalah matriks singular.

Sifat - sifat utama determinan Dieudonné adalah: (Brenner, 1968)

1. Multiplikatif
$$\mathrm{Det}\,(AB) = \mathrm{Det}\,(A)\mathrm{Det}\,(B) \tag{11}$$
2. Determinan Dieudonné dari matriks singular adalah 0.
3. Invarian terhadap operasi elementer baris dan kolom.
4. Jika $A = B \oplus C \in M_n(K)$ dengan $Det(B) = [b]$ dan $Det(C) = [c]$ untuk $b, c \in K^\times$, maka $Det(A) = [bc]$.

Contoh 3.2.1

Untuk

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix}, A \in H_2(K),$$

Penghitungan determinan Dieudonné dilakukan melalui operasi baris elementer, sehingga untuk ordo 2, diperoleh:

$$Det(A) = \begin{cases} [-b\bar{b}], & a = 0, \\ [a(c - ba^{-1}\bar{b})], & a \neq 0. \end{cases}$$

Diperhatikan bahwa hasilnya selalu di dalam $[F]$, karena $b\bar{b}$ dan $a(c - ba^{-1}\bar{b})$ adalah elemen tetap di bawah involusi.

3.3. Hubungan Trace dan Determinan Dieudonné pada $H_n(K)$

Teorema 3.3.1.

Diberikan ring pembangi K berinvolusi dan $F = \{a \in K: \bar{a} = a\}$ tertutup terhadap perkalian maka untuk setiap $A \in H_n(K)$ berlaku: Jika $A = XDX^*$ dengan $X \in GL_n(K)$ dan $D = diag\,(d_1, \dots, d_n)$ dengan $d_i \in F$, maka

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} d_i \, , Det(A) = \left[\prod_{i=1}^{n} d_i \right] \tag{12}$$

Bukti.

Karena determinan Dieudonné bersifat invarian terhadap kesamaan, jika $A = XDX^{-1}$ maka oleh sifat multipikatif dan sifat invariansi operasi dasar, diperoleh $\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(D)$ atau $\mathrm{Det}(XDX^{-1}) = \mathrm{Det}(X)\mathrm{Det}(D)\mathrm{Det}(X^{-1}) = [1]$ sehingga faktor $\mathrm{Det}(X)\mathrm{Det}(X^{-1}) = [1]$ berakibat $\mathrm{Det}(A) = [\prod_i d_i]$.

Untuk matriks diagonal $D = \mathrm{diag}\,(d_1, \dots, d_n)$ dengan $d_i \in F$, jelas $\mathrm{tr}\,(D) = \sum_i d_i \in F$ dan $\mathrm{Det}(D) = [\prod_i d_i]$. Karena kesamaan oleh X tidak mengubah kelas determinan, diperoleh

$$\mathrm{tr}\,(A) = \mathrm{tr}\,(D) = \sum_{i} d_i \, , \mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(D) = \left[\prod_{i} d_i \right].$$

■

Pada ruang $H_n(K)$, trace dan determinan Dieudonné memiliki hubungan yang serupa dengan kasus komutatif, yaitu melalui struktur eigen (spasio-spektral) sebagai berikut:

Teorema 3.3.2.

Jika $A \in H_n(K)$ dan terdapat faktorisasi spectral $A = U\Lambda U^*$, di mana U uniter/invertibel dan $\Lambda = diag\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dengan λ_i elemen pusat $Z(K)$ maka $ReTr\,(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ dan $Det\,(A) = [\lambda_1 \cdots \lambda_n]$.

Bukti.

Karena A $A \in H_n(K)$, maka A dapat ditulis dalam bentuk $A = U\Lambda U^*$, dengan $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dan setiap $\lambda_i$merupakan elemen tetap involusi ($\overline{\lambda_i} = \lambda_i$) yang terletak di pusat $Z(K)$. Karena elemen-elemen tersebut bersifat Hermitian, maka nilainya real terhadap involusi, sehingga

$$\mathrm{ReTr}(A) = \mathrm{ReTr}(U^* A U) = \mathrm{ReTr}(\Lambda) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}\,(\lambda_i).$$

Sementara itu, berdasarkan sifat-sifat dasar determinan Dieudonné yaitu multiplikatif, invarian terhadap operasi elementer, dan terhadap konjugasi, diperoleh:

$$\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(U\Lambda U^*) = \mathrm{Det}(U)\,\mathrm{Det}(\Lambda)\,\mathrm{Det}(U^*) = [1]\,[\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n].$$

Karena $\mathrm{Det}(U)\mathrm{Det}(U^*) = [1]$, maka diperoleh

$$\mathrm{Det}(A) = [\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n].$$

■

Untuk setiap $A \in H_n(K)$ dan setiap matriks uniter $U \in GL_n(K)$, berlaku sifat-sifat berikut:

1. Invariansi terhadap konjugasi uniter:
$$\mathrm{ReTr}(U^* A U) = \mathrm{ReTr}(A), \mathrm{Det}(U^* A U) = \mathrm{Det}(A).$$
2. Nilai keduanya real:
$$\mathrm{ReTr}(A) \in \mathbb{R}, \mathrm{Det}(A) \in \mathbb{R}_{>0}.$$

3. Hubungan spektral langsung:

$$\mathrm{ReTr}(A) = \sum_i \lambda_i \, , |\mathrm{Det}(A)| = \prod_i |\lambda_i|$$

Kedua hubungan ini memperlihatkan bahwa, sebagaimana pada kasus komutatif, trace merupakan jumlah nilai-nilai eigen Hermitian, sedangkan determinan Dieudonné merupakan hasil kali nilai-nilai eigen tersebut.

Contoh 3.3.1.

Misalkan $K = \mathbb{H}$, dan ambil

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i+j \\ -i-j & 2 \end{bmatrix} \in H_2(\mathbb{H})$$

dengan $A = A^*$.

- *Trace real:*

$$ReTr\ (A) = Re\ (1) + Re\ (2) = 3$$

- *Determinant Dieudonné:*
  Karena $a_{11} \neq 0$:

$$Det\ (A) = [a_{11}a_{22} - a_{11}(a_{21}a_{11}^{-1})a_{12}]$$

Substitusi:

$$\begin{aligned} Det(A) &= [1(2) - 1(-i-j)(1^{-1})(i+j)] \\ &= [2 - (i+j)(i+j)](i+j)^2 \\ &= i^2 + j^2 + 2ij \\ &= -1 - 1 + 2k \\ &= -2 + 2k \end{aligned}$$

jadi:

$$Det\ (A) = [2 - (-2 + 2k)] = [4 - 2k]$$

Dalam abelianisasi $\mathbb{H}^\times / [\mathbb{H}^\times, \mathbb{H}^\times] \cong \mathbb{R}_{>0}$,

$$|Det\ (A)| = \sqrt{(4)^2 + (2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Teorema 3.3.3.

Misalkan $A \in H_n(K)$ dengan invarian trace $Tr\ (A) = \tau$. Struktur faktorisasi Hermitian dari A bergantung secara langsung pada tanda dan nilai τ:

$$A = LL^* + C, dengan\ Tr\ (C) = 0 \tag{13}$$

jika dan hanya jika $Tr\ (A) \geq 0$.

Secara khusus berlaku:

a. Jika $Tr(A) > 0$, maka A memiliki faktorisasi positif-definit.
b. Jika $Tr(A) = 0$, maka A hanya terdiri atas komutator, sehingga tidak positif-definit.
c. Jika $Tr(A) < 0$, maka struktur faktorisasi dapat diperoleh melalui negasi $A \mapsto -A$.

Lebih umum, setiap matriks Hermitian dapat dituliskan sebagai

$$A = \sum_i R_i^* R_i + \sum_j [P_j, Q_j] \tag{14}$$

dengan $[P_j, Q_j] = P_j Q_j - Q_j P_j, Tr\ ([P_j, Q_j]) = 0$.
Bagian pertama $\sum_i R_i^* R_i$ menyumbang kontribusi positif terhadap trace sedangkan bagian kedua (komutator) memiliki trace nol dan tidak mengubah total trace sistem.

Bukti.

Karena A Hermitian, maka $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^*) \in F$. Misalkan dilakukan faktorisasi Hermitian parsial

$$A = LL^* + C,$$

dengan $L \in M_n(K)$dan $C \in H_n(K)$memenuhi $\mathrm{Tr}(C) = 0$.
Dari sifat linearitas dan invarian *trace* diperoleh:

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(LL^*) + \mathrm{Tr}(C) = \mathrm{Tr}(LL^*),$$

karena $\mathrm{Tr}(C) = 0$.
Karena LL^*bersifat positif semidefinit pada ruang Hermitian, maka $\mathrm{Tr}(LL^*) \geq 0$. Dengan demikian, $\mathrm{Tr}(A) \geq 0$ menjadi syarat perlu dan cukup bagi eksistensi faktorisasi Hermitian positif tersebut.
Jika $\mathrm{Tr}(A) = 0$, maka $\mathrm{Tr}(LL^*) = 0$ berakibat $L = 0$, sehingga $A = C$. Oleh karena $\mathrm{Tr}(C) = 0$ dan C Hermitian, maka C hanya dapat dibentuk dari kombinasi komutator-komutator Hermitian:

$$C = \sum_j [P_j, Q_j], [P_j, Q_j] = P_j Q_j - Q_j P_j,$$

yang seluruhnya memiliki *trace* nol.
Sementara untuk kasus $\mathrm{Tr}(A) < 0$, berlaku

$$\mathrm{Tr}(-A) = -\mathrm{Tr}(A) > 0,$$

sehingga $-A$ memiliki faktorisasi positif-definit $-A = LL^* + C$, akibatnya $A = -LL^* - C$ memberikan struktur faktorisasi Hermitian setelah transformasi tanda.
Dengan demikian, nilai *trace* menentukan kelas faktorisasi Hermitian yang mungkin terbentuk, dan hanya bagian positif dari *trace* yang menentukan jumlah komponen faktorisasi yang dapat dibangun.

■

Teorema 3.3.4.

Misalkan $A \in H_n(K)$ dan $tr(A)$. Maka berlaku:
1. Jika $tr(A) = 0$, maka A singular dan

$$A = H_1 H_2 H_3 H_4, H_i \in H_n(K) \tag{15}$$

2. *Jika* $tr(A) \neq 0$*, maka* A *nonsingular dan ada faktor yang dapat didagonalkan* T *dengan* $Det_D(T) = 1$*, sehingga*

$$A = H_1 H_2 H_3 H_4 T \tag{16}$$

Bukti.
Untuk kasus pertama, *trace* nol menghasilkan setengah nilai eigen bernilai negatif terhadap positif, menyebabkan determinan Dieudonné bernilai nol. Berdasarkan (Gatephan & Rodtes, 2025), matriks singular dapat difaktorkan menjadi empat faktor Hermitian. Sedangkan untuk *trace* tak nol, A memiliki invers sehingga nilai $\mathrm{Det}_D(A) \in F^{\times}$; diperlukan T untuk menormalisasi determinan agar tetap di kelas F.

4. SIMPULAN

Nilai *trace* terbukti menjadi penentu utama dalam karakterisasi matriks Hermitian nonkomutatif, baik dari sisi singularitas maupun struktur faktorisasinya. Matriks dengan trace nol bersifat singular dan dapat difaktorkan sepenuhnya melalui empat komponen Hermitian dengan *trace* nol, sedangkan *trace* tak nol menghasilkan matriks nonsingular yang memerlukan tambahan satu komponen yang dapat didiagonalkan untuk menjaga sifat definitnya. Dengan demikian, ditemukan keterkaitan teoretis yang mendalam antara dua invarian fundamental yaitu *trace* sebagai invarian aditif dan determinan Dieudonné sebagai invarian multiplikatif yang secara bersama mengatur pola faktorisasi dan sifat spektral ruang Hermitian nonkomutatif.

5. REKOMENDASI

Penelitian ini memperjelas bagaimana kendala *trace* sebagai *regulator spektral* dalam sistem aljabar nonkomutatif dan membuka peluang aplikasi pada teori operator kuaternion dan ruang Hilbert nonkomutatif.

6. REFERENSI

Anton, H., & Kaul, A. (2019). *Elementary linear algebra* (12th edition, Wiley loose-leaf print edition). Wiley.

Bien, M. H., Dung, T. H., Ha, N. T. T., & Son, T. N. (2022). Decompositions of matrices over division algebras into products of commutators. *Linear Algebra and Its Applications*, *646*, 119–131. https://doi.org/10.1016/j.laa.2022.03.025

Bien, M. H., Dung, T. H., Ha, N. T. T., & Son, T. N. (2023). Involution widths of skew linear groups generated by involutions. *Linear Algebra and Its Applications*, *679*, 305–326. https://doi.org/10.1016/j.laa.2023.09.019

Bien, M. H., Son, T. N., Thuy, P. T. T., & Truong, L. Q. (2024). Products of unipotent matrices of index 2 over division rings. *Acta Mathematica Hungarica*, *173*(1), 74–100. https://doi.org/10.1007/s10474-024-01427-w

Bikchentaev, A. M., Kittaneh, F., Moslehian, M. S., & Seo, Y. (2024). *Trace Inequalities: For Matrices and Hilbert Space Operators*. Springer Nature Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-97-6520-1

Botha, J. D. (1998). Products of diagonalizable matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, *273*(1), 65–82. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(97)00344-3

Brenner, J. L. (1968). Applications of the Dieudonné determinant. *Linear Algebra and Its Applications*, *1*(4), 511–536. https://doi.org/10.1016/0024-3795(68)90025-6

Danchev, P. V., Dung, T. H., & Son, T. N. (2024). Products of traceless and semi-traceless matrices over division rings and their applications. *International Journal of Algebra and Computation*, *34*(03), 331–349. https://doi.org/10.1142/S0218196724500115

Doliwa, A. (2022). Non-commutative Hermite–Padé approximation and integrability. *Letters in Mathematical Physics*, *112*(4), 68. https://doi.org/10.1007/s11005-022-01560-z

Gatephan, P., & Rodtes, K. (2025). Products of Hermitian matrices over division rings. *Linear Algebra and Its Applications*, *710*, 531–545. https://doi.org/10.1016/j.laa.2025.02.016

Klep, I., Špenko, Š., & Volčič, J. (2018). Positive trace polynomials and the universal Procesi-Schacher conjecture: POSITIVE TRACE POLYNOMIALS. *Proceedings of the London Mathematical Society*, *117*(6), 1101–1134. https://doi.org/10.1112/plms.12156

Lord, S., McDonald, E., Sukochev, F., & Zanin, D. (2023). *Trace Formulas*. De Gruyter. https://doi.org/10.1515/9783110700176

Nie, J., & Yang, Z. (2020). Hermitian Tensor Decompositions. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, *41*(3), 1115–1144. https://doi.org/10.1137/19M1306889

Radjavi, H. (1969). Products of hermitian matrices and symmetries. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *21*(2), 369–372. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1969-0240116-9

Volčič, J. (2019). Stable Noncommutative Polynomials and Their Determinantal Representations. *SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry*, *3*(1), 152–171. https://doi.org/10.1137/18M1206734